

I-40 拡張カルマンフィルタを用いた不完全合成げたの合成度の同定とその応用について

北海道大学工学部	フェロー	佐藤浩一
北海道大学工学部	学生員	田川和弘
北海道大学工学部	フェロー	林川俊郎
北海道大学工学部	正員	小幡卓司
北海道大学工学部	正員	平沢秀之

1. まえがき

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、1989年に土木学会編¹⁾が出版され、異種材料を合成し合成構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。また、最近では、コンクリート構造物、鋼構造物に代わる第3の構造物としての合成構造物に関するガイドブック²⁾がNCB研究会より出版されている。

橋梁における合成構造物としては非合成げた、あるいは合成げたがある。非合成げたは単にRC床版と鋼げたとを重ねて用いたものであり、両者の間には結合がない。すなわち、合成度0%である。これに対して、合成げたではRC床版と鋼げたとをすれ止め(ジベル)で結合し、両者が一体となって働くようにした橋梁であり、取り付けが簡単にでき、溶接変形が少なく、製作上有利な点が多い頭つきスタッドジベルが用いられている。この場合には合成度を100%としている。

通常は合成度100%と考えて解析しているが、頭つきスタッドジベルはブロックジベルに比べて剛性が小さいためすれが生じる。すれを考慮した解析の場合が不完全合成げた(合成度0~100%)であり、これらについては多くの研究がなされている³⁾⁻¹³⁾。しかしながら、合成げたの合成度あるいは不完全度に関しては研究が少なく、文献10),11)では不完全合成げたの合成度を示しており、また、文献13)では不完全合成げたの不完全度の簡易推定法を示している程度である。

本論文では、不完全合成げたの合成度の評価式を示し、合成度を同定する逆解析手法としてベイズ理論により事前分布を更新し事後分布を推定する拡張カルマンフィルタを用いて、模擬測定データ(数値解析によって求めた観測データ)より曲げ剛性とジベルのばね定数を同定し合成度を求め、コンクリートと鋼げたに生じる応力度を求める算定式に適用する方法を提案するものである。

2. 不完全合成げたのたわみに関する微分方程式

図-1は本論文で用いる合成げたであり、図-2はその断面を示している。

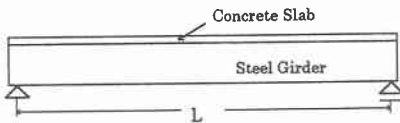


図-1 合成げた

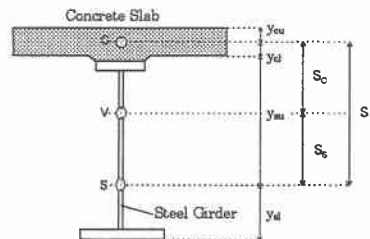


図-2 合成げたの断面

Study on Identification by means of Expanded Kalman Filter of Composite Degree of Partial Composite Beams and its Application
by Koichi SATO, Kazuhiro TAGAWA, Toshiro HAYASHIKAWA, Takashi OBATA, and Hideyuki HIRASAWA

ここで、 L は合成げたのスパン、 S はコンクリート床版の中立軸と鋼げたの中立軸との間の距離、 S_s 、 S_c はそれぞれ鋼げた、コンクリート床版の中立軸と合成げたの中立軸との間の距離、 y_{su} 、 y_{sd} はそれぞれコンクリート床版上端、下端とコンクリート床版中立軸との距離、 y_{su} 、 y_{sd} はそれぞれ鋼げた上端、下端と鋼げた中立軸との距離である。

不完全合成げたの曲げ解析におけるたわみ W_{ve} に関する微分方程式は次式のとおりである^{6),9)}。

$$\frac{d^4 W_{ve}}{dX^4} - \kappa^2 \frac{d^2 W_{ve}}{dX^2} = \frac{\kappa^2}{EI_v} M_{vv} + \frac{n}{E(nI_s + I_c)} p \quad (1)$$

$$\kappa^2 = \frac{nI_v}{nI_s + I_c} \frac{kn}{EA_c S_c}, \quad I_v = I_s + \frac{I_c}{n} + \frac{A_c S_c S}{n} \quad (2)$$

ここで、 p は荷重強度、 E は鋼げたのヤング係数、 n は鋼とコンクリートのヤング係数比、 K はジベルのばね定数³⁾、 M_{vv} は合成げたの合成断面の中立軸に作用する曲げモーメント、 I_s は鋼げたの断面2次モーメント、 I_c はコンクリート床版の断面2次モーメント、 I_v は合成断面の断面2次モーメントである。

また、完全合成げたの曲げ解析におけるたわみに関する微分方程式は次式のとおりである。

$$\frac{d^4 W_v}{dX^4} = \frac{p}{EI_v} \quad (3)$$

図一3のように、不完全合成げたのたわみ W_{ve} と完全合成げたのたわみ W_v との差をすれによるたわみ W_e とすれば次式が得られる。

$$W_e = W_{ve} - W_v \quad (4)$$

式(4)を式(1)に代入すれば次式得られる。

$$\frac{d^4 W_v}{dX^4} + \frac{d^4 W_e}{dX^4} - \kappa^2 \frac{d^2 W_e}{dX^2} = \frac{p}{EI_v} - \frac{p}{EI_v} + \frac{n}{E(nI_s + I_c)} p \quad (5)$$

式(5)は式(3)を用いれば次の2本の微分方程式になる。

$$\begin{cases} \frac{d^4 W_v}{dX^4} = \frac{p}{EI_v} \\ \frac{d^4 W_e}{dX^4} - \kappa^2 \frac{d^2 W_e}{dX^2} = \frac{p}{EI_e} \end{cases} \quad (6)$$

$$\quad (7)$$

$$I_e = I_v \frac{nI_s + I_c}{A_c S_c S} \quad (8)$$

断面諸元を与え、境界条件を考慮し、式(6),(7)を応力法、あるいは剛性マトリックス法で解くことができる⁹⁾。

3. 不完全合成げたの合成度の評価式

不完全合成げたの合成度の評価式は以下のようにして求める¹⁰⁾。

単純支持で集中荷重の場合、式(7)をフーリエ級数で求めると

$$W_e(x, \xi) = \frac{2P}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{E_s I_e \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \kappa^2 E_s I_e \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (9)$$

単純支持で集中荷重の場合、式(6)をフーリエ級数で求めると

$$W_v(x, \xi) = \frac{2P}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{E_s I_v \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4} \quad (10)$$

となる。また、同様にして単純支持で等分布満載荷重の場合、式(7)をフーリエ級数で求めると

$$W_e(x, \xi) = \frac{4P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(E, I_e \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \kappa^2 E, I_e \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) m\pi} \quad (11)$$

単純支持で等分布満載荷重の場合、式(6)をフーリエ級数で求めると

$$W_v(x, \xi) = \frac{4P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(E, I_v \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4\right) m\pi} \quad (12)$$

となる。式(9)、(10)と式(11)、(12)において $m=1$ のみとして、 W_e と W_v の比を γ とすれば

$$\gamma = \frac{W_e}{W_v} = \frac{I_v}{I_e} \beta = \frac{A_e S_e S}{nI_s + I_e} \beta = \frac{A_e S_e S}{nI_s + I_e} (1 - \alpha) \quad (13)$$

となる。ここで、

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 L^2}{\pi^2}} = 1 - \alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\kappa^2 L^2}} = 1 - \beta \quad (14)$$

この α が不完全合成げたの合成度の評価式である。式(9)、(10)と式(11)、(12)において m を無限項 (実際の計算では有限項) とした場合の和の比と $m=1$ のみの場合の比はほとんど同じである。したがって、 $m=1$ のみの場合として β を求めることにより集中荷重の場合も等分布満載荷重の場合も同じ β として扱うことができる。また、縦軸に合成度 α 、横軸に κL (無次元量) をとり図示したものが図-4 の α 曲線である。

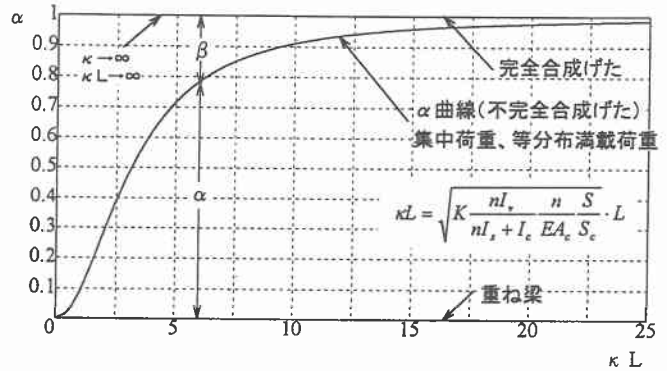


図-4 α 曲線

4. 不完全合成げたの合成度の同定に用いる拡張カルマンフィルタ

本論文では、曲げ剛性やジベルのばね定数を同定するにあたり、確率的な手法であるカルマンフィルタを用いる。カルマンフィルタ基本式は状態表示の線形確率システムとして示されるが、観測式が非線形の場合は拡張カルマンフィルタを用いる。ここで、状態式および非線形関数を推定値のまわりにテーラー展開して線形化した拡張カルマンフィルタの観測式を示す¹⁴⁾⁻¹⁷⁾。

状態式

$$\{x_{t+1}\} = [F_t] \{x_t\}$$

観測式

$$\{\eta_t\} = [H_t] \{x_t\} + \{v_t\} \quad (15)$$

ここで

$$\{\eta_t\} = \{y_t\} - \{h(\{\hat{x}_{t/t-1}\})\} + [H_t] \{\hat{x}_{t/t-1}\}$$

$$[H_t] = \left(\partial \{h_t\} / \partial \{x_t\} \right) \Big|_{x=\hat{x}_{t/t-1}}$$

ここで、 $\{x_t\}$ は状態ベクトル、 $\{\eta_t\}$ は観測ベクトル、 $\{v_t\}$ はガウス白色観測ノイズ、 $[F_t]$ はシステム行列、 $[H_t]$ は観測行列、 $\{h(\{\hat{x}_{t/t-1}\})\}$ は非線形関数を推定値 $\{\hat{x}_{t/t-1}\}$ でテーラー展開して得られた式の初項である。本論文では、推定パラメータとして状態ベクトルは $[x_1, x_2]^T = [T, E I_e]^T$ であり、観測ベクトルは模擬測定データ (数

値計算によって求めた観測データ）を用いて $\{y\} = \{W_0\}$ とする。ここで、 $\{W_0\}$ は式(7)で断面諸元を与え、境界条件を考慮し、剛性マトリックス法で順解析して求めたたわみである（図—3参照）。また、本論文で用いる推定パラメータに相当する状態ベクトルにはそれ自身に時間的な遷移構造を持たない（定数である）ため、状態式にはシステム行列に単位行列を選ぶ。よって本論文での状態式は

$$\begin{Bmatrix} T \\ EI_e \end{Bmatrix}_{t+1} = [I] \begin{Bmatrix} T \\ EI_e \end{Bmatrix}_t \quad (16)$$

である。ここで、

$$T = K \left(\frac{nI_v}{A_c S_c} \right)^2 \quad (17)$$

であり、K はジベルのばね定数、 A_c はコンクリート床版の断面積である。

また、式(7)を剛性マトリックス法で解いた変位ベクトルを $\{U\}$ とすれば、次式のようになる。

$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (18)$$

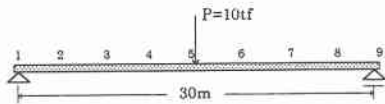
ここで、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{F\}$ は外力ベクトルである。式(18)の $\{U\}$ の最初の値はまず計算開始時に求められ、さらに逐次求まる状態ベクトルの推定値から計算される。この $\{U\}$ 中のたわみ成分が $\{h(\{x_{t,i}\})\}$ になる。また、 p 個の観測データ、2 個の推定パラメータがある場合、観測行列 $[H_t]$ は $(p \times 2)$ の行列となり、観測行列は式(18)を状態量で偏微分したものであり、次式で求まる。

$$[H_t] = \left(\frac{\partial \{h_t\}}{\partial \{x_t\}} \right)_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial T} & \frac{\partial U_1}{\partial EI_e} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial U_p}{\partial T} & \frac{\partial U_p}{\partial EI_e} \end{bmatrix}_t \quad (19)$$

5. 不完全合成げたの曲げ剛性とジベルのばね定数の同定

本解析のように合成げたから曲げ剛性やジベルのばね定数を同定する場合、拡張カルマンフィルタの入力データとなる観測値は実橋から得られたたわみのデータを用いて逆解析を行うべきであるが、非合成げたのスラブアンカー $\phi 13$ を 1m ピッチ程度で設置した場合でも合成度がかなり高いので、実橋による観測データを得るのが今のところ困難である。そのため本論文では、模擬測定データ（数値計算によって求めた観測データ）を用いることとする。

図—5 のような両端単純支持で、図—2 のような断面を有する合成げたにおいて、合成げたの断面諸元を $L=30$ m、 $S=105.484 \times 10^{-2}$ m、 $S_c=33.678 \times 10^{-2}$ m、 $S_s=71.806 \times 10^{-2}$ m、 $A_s=268.0 \times 10^{-4}$ m²、 $A_c=0.4$ m²、 $I_s=1.0993 \times 10^{-2}$ m⁴、 $I_v=3.1483 \times 10^{-2}$ m⁴、 $I_c=1.3333 \times 10^{-3}$ m⁴、 $K=500,5000$ tf/m² とする。合成げたを 8 等分し、スパンの中央に集中荷重 $P=10$ tf を載荷して求められた合成げたのたわみを拡張カルマンフィルタの入力データ（模擬測定変位）とした。ここで、ジベルのばね定数 $K=500$ tf/m² と $K=5000$ tf/m²（実橋では未知パラメータである）の 2 通りの順解析をおこない、たわみの模擬データを得た。このジベルのばね定数を拡張カルマンフィルタを用いて同定していくのが本論文の目的である。



図—5 合成げたの計算モデル

表—1.1 模擬測定変位 ($K=500$ tf/m²)

節点番号	模擬測定変位 (m)
2	0.4214855E-02
3	0.7921400E-02
4	1.0584930E-02
5	1.1616620E-02
6	1.0584930E-02
7	0.7921400E-02
8	0.4214855E-02

表—1.2 推定パラメータの初期値

T (tf)	EI _e (tfm ⁴)
3.E+03	3.0E+05
2.E+03	3.0E+05
1.E+03	3.0E+05
0.E+00	3.0E+05

ジベルのばね定数が分かれば既知の断面諸元を用いて式(2)で κ^2 を求め、スパンと円周率を代入することにより合成度 α を求めることができる。

計算例1として $K=500\text{tf/m}^2$ で、表—1.1のような模擬測定変位、表—1.2のような推定パラメータの初期値で計算を行った。T の同定値と収束回数を図—6(a)、E_Ie の同定値と収束回数を図—6(b)に示す。図—6(a)、図—6(b)から、T、E_Ie は初期値によらずある一定の値に収束することが分かる。その値は $T=1.3382 \times 10^5\text{tf}$ 、 $E_{Ie}=3.6423 \times 10^5\text{tfm}^2$ であり、式(2)よりジベルのばね定数の値は $K=500.03\text{tf/m}^2$ となり、断面諸元のジベルのばね定数 $K=500\text{tf/m}^2$ とほぼ一致することが分かる。また、そのときの合成げたの合成度は式(14)より $\alpha=25\%$ となる。

計算例2として $K=5000\text{tf/m}^2$ で、表—2.1のような模擬測定変位、表—2.2のような推定パラメータの初期値で計算を行った。T の同定値と収束回数を図—7(a)、E_Ie の同定値と収束回数を図—7(b)に示す。図—7(a)、図—7(b)から、T、E_Ie は初期値によらずある一定の値に収束することが分かる。その値は $T=1.3381 \times 10^4\text{tf}$ 、 $E_{Ie}=3.6412 \times 10^5\text{tfm}^2$ であり、式(2)よりジベルのばね定数の値は $K=5001.34\text{tf/m}^2$ となり、断面諸元のジベルのばね定数 $K=5000\text{tf/m}^2$ とほぼ一致することが分かる。また、そのときの合成げたの合成度は式(14)より $\alpha=77\%$ となる。

6. 応力度の算定

不完全合成げたのたわみ、曲げモーメント、軸力は次式で求まる。

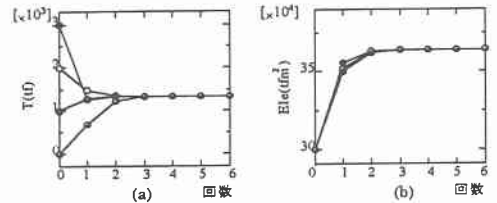
$$W_{ve} = W_v + W_e = W_v \left(1 + \frac{W_e}{W_v} \right) = W_v (1 + \gamma) \quad (20)$$

$$M_{vve} = M_{vv} + M_{ve} = M_{vv} (1 + \gamma) \quad (21)$$

$$N_{ve} = N_{vve} + N_2 = \frac{A_c S_c}{n I_v} M_{vv} (1 - \beta) \quad (22)$$

不完全合成げたの曲げモーメントと軸力は式(13)、(14)の α 、 β 、 γ を用いて式(21)、(22)で求まるので、コンクリート床版の上縁応力度 σ_{cu} 、下縁応力度 σ_{cl} 、および鋼けたの上縁応力度 σ_{su} 、下縁応力度 σ_{sl} は

$$\begin{aligned} \sigma_{cu} &= -\frac{N_{c0}}{A_c} - \frac{M_{c0}}{I_c} y_{cu} \\ \sigma_{cl} &= -\frac{N_{c0}}{A_c} + \frac{M_{c0}}{I_c} y_{cl} \\ \sigma_{su} &= +\frac{N_{s0}}{A_s} - \frac{M_{s0}}{I_s} y_{su} \\ \sigma_{sl} &= +\frac{N_{s0}}{A_s} + \frac{M_{s0}}{I_s} y_{sl} \end{aligned} \quad (23)$$



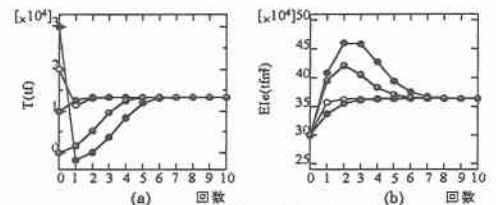
図—6 同定値と収束回数

表—2.1 模擬測定変位($K=5000\text{tf/m}^2$)

節点番号	模擬測定変位 (mm)
2	1.229637E-03
3	2.366792E-03
4	3.269106E-03
5	3.667582E-03
6	3.269106E-03
7	2.366792E-03
8	1.229637E-03

表—2.2 推定パラメータの初期値

T (tf)	E _I e (tfm ²)
3.E+04	3.0E+05
2.E+04	3.0E+05
1.E+04	3.0E+05
0.E+00	3.0E+05



図—7 同定値と収束回数

で求まる。ここで、

$$M_{c0} = \frac{I_c}{nI_v} M_w(1+\gamma) \quad , \quad M_{s0} = \frac{I_s}{I_v} M_w(1+\gamma) \quad (24)$$

$$N_{s0} = N_{c0} = N_{ve} = \frac{A_c S_c}{nI_v} M_w(1-\beta) \quad (25)$$

また、 y_{cu} 、 y_d 、 y_{su} 、 y_{sl} は図-2に示す距離である。式(23)の縁応力度は合成度 α を用いて容易に求められる。なお、式(20)、(21)、(22)において、 $\alpha=1$ (即ち、 $\beta=0$ 、 $\gamma=0$)の場合は完全合成げたの場合であり、 $\alpha=0$ (即ち、 $\beta=1$ 、 $\gamma=AcScS/(nIs+Ic)$)の場合は重ね梁の場合である。

7. あとがき

拡張カルマンフィルタによる逆解析に関しては、入力データとなる模擬測定データ(数値計算によって求めた観測データ)を用いて解析をおこなった。その結果、推定パラメータ(T,EIe)は、入力する初期値によらずある一定の値に収束し、その値から得られるジベルのばね定数は予想する値とほぼ一致した。また収束するまでの計算回数は推定パラメータ(T,EIe)の初期値や同定するジベルのばね定数の値によって異なるが、だいたい3~8回程度であることが分かった。このように、拡張カルマンフィルタは不完全合成げたの合成度を同定する有効な方法の一つと考えられる。

以上のように本論文では、不完全合成げたの合成度の評価式を示し、拡張カルマンフィルタを用いて曲げ剛性とジベルのバネ定数を同定し合成度を求め、コンクリートと鋼げたに生じる応力度を求める算定式に適用する方法を提案した。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造物の設計ガイドライン、1989.
- 2) NCB 研究会編：新しい合成構造と橋、1996.
- 3) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M. : Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 4) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論、土木学会論文集、No.67、pp.1-10、1960.3.
- 5) 橘 善雄、足立義雄：不完全合成桁について、土木学会論文集、No.112、pp.11-19、1964.12.
- 6) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.1.
- 7) 浜田純夫、有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析、土木学会論文集、No.265、pp.1-9、1977.9.
- 8) 小松定夫、佐々木孝：不完全合成格子桁橋の理論と近似計算法について、土木学会論文集、No.329、27-37、1983.1.
- 9) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A、pp.1223-1236、1990.3.
- 10) 佐藤浩一、井上稔康、安念秀剛：合成桁の曲げ剛性に関する一考察、土木学会北海道支部論文報告集、第49号、pp.69-72、1993.
- 11) 佐藤浩一、及川昭夫、小幡卓司、平沢秀之：合成板の合成度とその適用について、土木学会北海道支部論文報告集、第49号、pp.79-82、1993.
- 12) 佐藤浩一、渡辺 昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989.
- 13) 中島章典、溝江慶久：不完全合成桁の不完全度の簡易推定法、土木学会論文集、No.537、pp.89-96、1996.4.
- 14) 片山 徹：応用カルマンフィルタ、朝倉書店、1983.4.
- 15) 星谷 勝、斉藤悦郎：建設技術者のためのデータ解析と応用(カルマンフィルタを中心として)、鹿島出版会、1991.7.
- 16) 村瀬治比古、小山修平、石田良平：パソコンによる計算力学 順・逆解析入門、森北出版、1990.
- 17) 中野道雄、西山清：パソコンで解くカルマンフィルタ、丸善、1993.