

I-39

拡張カルマンフィルタを用いた連続げたのねじり及び

そりねじり定数の同定について

北海道大学工学部	フェロー	佐藤浩一
北海道大学工学部	学生員	山崎敏嗣
北海道大学工学部	フェロー	林川俊郎
北海道大学工学部	正員	小幡卓司
北海道大学工学部	正員	平沢秀之

1. まえがき

コンピュータの大型化、高速化、多様化、特にパーソナルコンピュータの普及などにより、境界値問題の解法として差分法、有限要素法 (FEM)、境界要素法 (BCM) などが広く用いられるようになっている。これらは境界条件や領域形状などを与えて問題の微分方程式を数値的に解く、いわゆる順問題 (direct problem) の解析用ツールである。最近、これらを利用して逆問題 (inverse problem) のコンピュータ解析に関する研究が特に注目されている。

一般に逆問題は原因から結果を推定するという類の全ての問題を含んでおり、理工系分野ばかりでなく他のあらゆる分野にわたり横断的に存在するきわめて重要な問題といわれている。工学上の用語では「逆問題とはある系からの出力を元にこの系への入力あるいは系そのものの欠落情報を同定する問題である」と定義されている¹⁾。

境界値問題における逆問題は上述の定義により、

(A) 領域の形状を求める問題。物体内にある未知境界を同定する問題。

(B) 場を支配している微分方程式を求める問題。

(C) 境界の一部あるいは全部における境界条件を求める問題。

(D) 領域の内部で作用している負荷を求める問題。

(E) 領域の内部あるいは境界部における材料特性を推定する問題。

などが考えられる。

本報告では、連続直線げたにねじり荷重が作用した場合の微分方程式の係数 (ねじり定数およびそりねじり定数) を、厳密にはねじり定数およびそりねじり定数は材料特性ではないが前述の分類 (E) に属するものと考えて、拡張カルマンフィルタを用いて同定する手法を検討したものである。

2. 直線げたのそりねじり解析理論と剛性マトリクス

直線げたにおいて分布トルク $m_t(x)$ が作用したとき、ねじり角に関する微分方程式は次式で表される。

$$EI_w \frac{d^4\theta(x)}{dx^4} - GJ \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = m_t(x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 $\theta(x)$ はねじり角、 I_w はそりねじり定数、 J は純ねじり定数、 $m_t(x)$ は分布トルクである。

Study on Identification by means of Expanded Kalman Filter of Torsional Rigidity and Torsional Warping Rigidity of Continuous Beams

by Koichi Sato, Satoshi Yamazaki, Toshiro Hayashikawa, Takashi Obata and Hideyuki Hirasawa

式(1)の一般解は次式で表される。

$$\theta(x) = A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x + A_3 x + A_4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

従って、剛性マトリクスは次の通りである。

$$\begin{Bmatrix} \alpha \sinh \alpha l & \cosh \alpha l - 1 & -\alpha \sinh \alpha l & \cosh \alpha l - 1 \\ \cosh \alpha l - 1 & \frac{1}{\alpha} (\alpha l \cosh \alpha l - \sinh \alpha l) & -(\cosh \alpha l - 1) & \frac{1}{\alpha} (\sinh \alpha l - \alpha l) \\ -\alpha \sinh \alpha l & -(\cosh \alpha l - 1) & \alpha \sinh \alpha l & -(\cosh \alpha l - 1) \\ \cosh \alpha l - 1 & \frac{1}{\alpha} (\sinh \alpha l - \alpha l) & -(\cosh \alpha l - 1) & \frac{1}{\alpha} (\alpha l \cosh \alpha l - \sinh \alpha l) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (3)$$

すべての要素に $s = \frac{(GJ)^2}{2 - 2 \cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l}$ をかける。ただし、 $\alpha = \sqrt{\frac{GJ}{EI_w}}$ 、 l は一要素長である。

また、式(1)の解を次の3次の多項式で表示されたとすれば、

$$\theta(x) = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

剛性マトリクスは次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{12EI_w}{l^3} + \frac{6GJ}{5l} & \frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10} & -(\frac{12EI_w}{l^3} + \frac{6GJ}{5l}) & \frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10} \\ \frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{4EI_w}{l} + \frac{2GJ}{15} & -(\frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10}) & \frac{2EI_w}{l} - \frac{GJ}{30} \\ -(\frac{12EI_w}{l^3} + \frac{6GJ}{5l}) & -(\frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10}) & \frac{12EI_w}{l^3} + \frac{6GJ}{5l} & -(\frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10}) \\ \frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_w}{l} - \frac{GJ}{30} & -(\frac{6EI_w}{l^2} + \frac{GJ}{10}) & \frac{4EI_w}{l} + \frac{2GJ}{15} \end{Bmatrix} \quad \dots (5)$$

剛性マトリクスは式(3)のようになるが、拡張カルマンフィルタを用いるにあたっては剛性マトリクスを推定値で微分したものが必要となるため、簡単な形で表される 式(5)の剛性マトリクスを使用する。

3. 拡張カルマンフィルタについて

一般に、拡張カルマンフィルタは次に示すような状態方程式と非線型の観測方程式を基本式として構成されている^{3),3),6)}。

$$\text{状態方程式} \quad x_{t+1} = [F_t]x_t + [G_t]w_t \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{観測方程式} \quad y_t = h_t(x_t) + v_t \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 x_t は状態ベクトル、 y_t は観測ベクトル、 w_t はシステムノイズ、 v_t は観測ノイズ、 h_t は観測式、 $[F_t]$ はシステム行列、 $[G_t]$ は駆動行列。また、ノイズは正規性のホワイトノイズである。

ただし、ここで扱う問題は静的なパラメータ同定問題であり、推定値である状態ベクトルにはそれ自身に時間的な遷移構造を持たない。そのため、状態式には時間軸について一定であるという条件をつける目的でシステム行列に単位行列を選び、誤差の混入は無いのでシステムノイズは削除する²⁾。

このようなシステムに対するカルマンフィルタは、次のような繰り返しのアルゴリズムとして与えられる。時間軸を繰り返し計算回数とすることにより、次々と推定値を更新していき、より真値に近づけることができる⁵⁾。

観測更新アルゴリズム

$$\text{初期値} \quad \hat{x}_{0/0} = \hat{x}_0 \quad P_{0/0} = \sum_0$$

$$[K_t] = [P_{t/t-1}] [H_t]^T \{ [H_t] [P_{t/t-1}] [H_t]^T + [R_t] \}^{-1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\hat{x}_{t+1/t} = \hat{x}_{t/t-1} + [K_t] \{ y_t - [H_t] \hat{x}_{t/t-1} \}$$

$$[P_{t+1/t}] = [P_{t/t-1}] - [K_t] [H_t] [P_{t/t-1}]$$

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ただし、} [H_t] = \left. \frac{\partial h_t}{\partial x_t} \right|_{x=\hat{x}_{t|t-1}}, \quad \eta_t = y_t - h_t(x) + [H_t] \hat{x}_{t|t-1}$$

このアルゴリズムを用い、ねじり定数とそりねじり定数の同定を行う。

ねじり定数とそりねじり定数を同定するため、状態方程式 式(6)は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} GJ \\ EI_w \end{Bmatrix}_{t+1} = [I] \begin{Bmatrix} GJ \\ EI_w \end{Bmatrix}_t \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、観測値としてねじり角が得られる時、観測式 h_t は剛性マトリクス K を用いて次の式で表わせる。

$$h_t = K^{-1} \cdot F \quad \dots\dots\dots (10)$$

それに伴い、感度行列 $[H_t]$ は次のようになる^{2),4)}。

$$[H_t] = \frac{\partial h_t}{\partial x_t} = \frac{\partial K^{-1}}{\partial x_t} F = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_t} K^{-1} \cdot F \quad \dots\dots\dots (11)$$

4. 数値計算例

図-1に示すような桁について、カルマンフィルタを用い、ねじり定数およびそりねじり定数の同定を行った。桁については、単純げた、3径間連続げた、5径間連続げたの3通りについて計算を行った。また、荷重条件についても、集中ねじり荷重、等分布満載ねじり荷重の2通りについて計算を行った。箱形断面には、一径間150m、集中ねじり荷重として $M_t = 100 \text{ tfm}$ 、等分布満載ねじり荷重として $m_t = 2 \text{ tfm/m}$ の条件で計算している。I形断面には、一径間30m、集中ねじり荷重として $M_t = 1.0 \text{ tfm}$ 、等分布満載ねじり荷重として $m_t = 0.1 \text{ tfm/m}$ の条件で計算している。ただし、図-2に示す断面形状によるねじり定数およびそりねじり定数によって計算して得たねじり角を、模擬観測データとして使用している。なお、箱形断面形状の断面諸元は文献(7)を参照した。同定結果は図-3.1から図-3.10に示している。

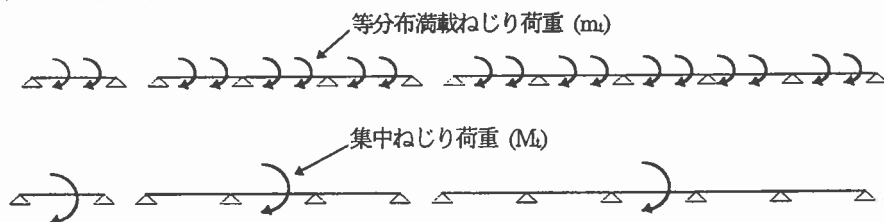
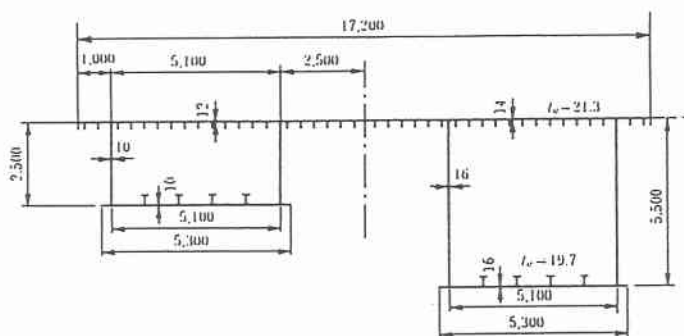
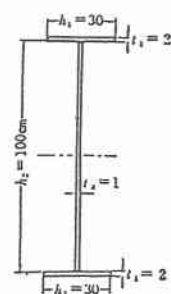


図-1 単純げた、3径間連続げた、5径間連続げた



平均断面定数
 $EI_w = 1.701 \times 10^9 \text{ tf} \cdot \text{m}^4$
 $GJ = 1.701 \times 10^7 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$

図-2.1 断面形状 (箱形断面)



$EI_w = 4.725 \times 10^2 \text{ tf} \cdot \text{m}^4$
 $GJ = 1.563 \times 10^1 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$

図-2.2 断面形状 (I形断面)

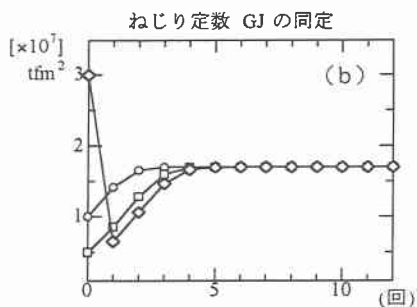
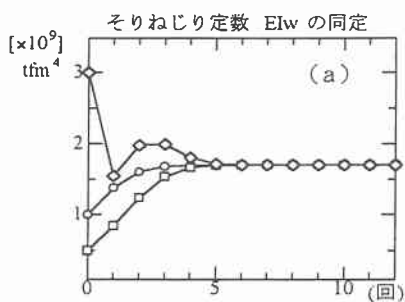


図-3.1 単純げた 集中ねじり荷重 (箱形断面)

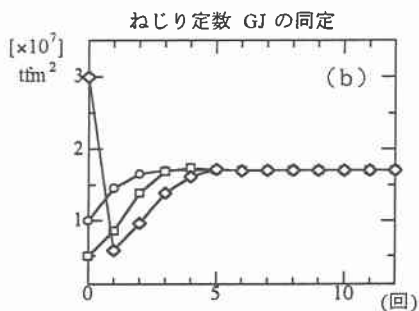
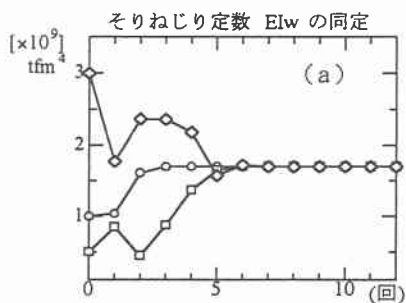


図-3.2 3径間連続げた 集中ねじり荷重 (箱形断面)

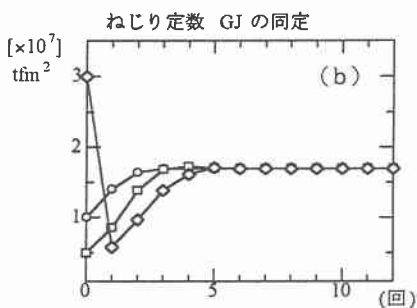
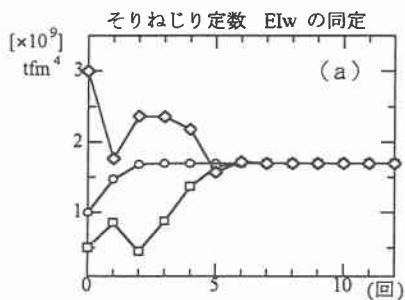


図-3.3 5径間連続げた 集中ねじり荷重 (箱形断面)

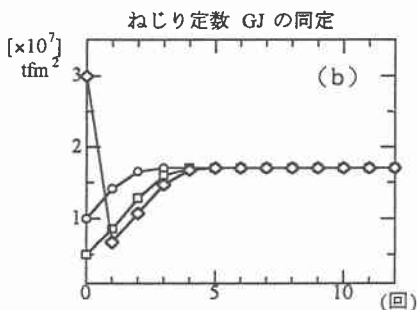
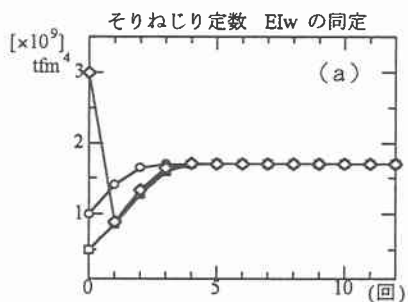


図-3.4 3径間連続げた 等分布満載ねじり荷重 (箱形断面)

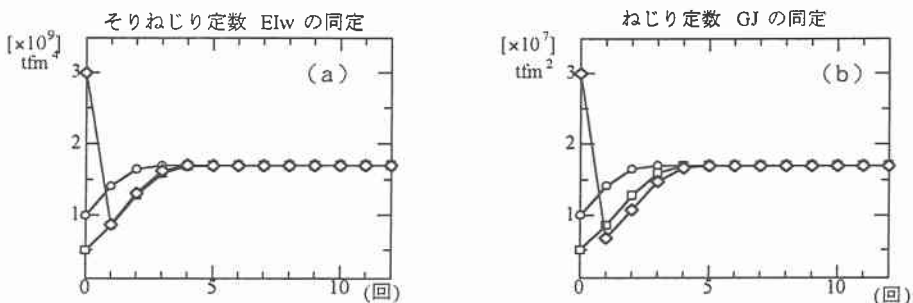


図-3.5 5径間連続げた 等分布満載ねじり荷重 (箱形断面)

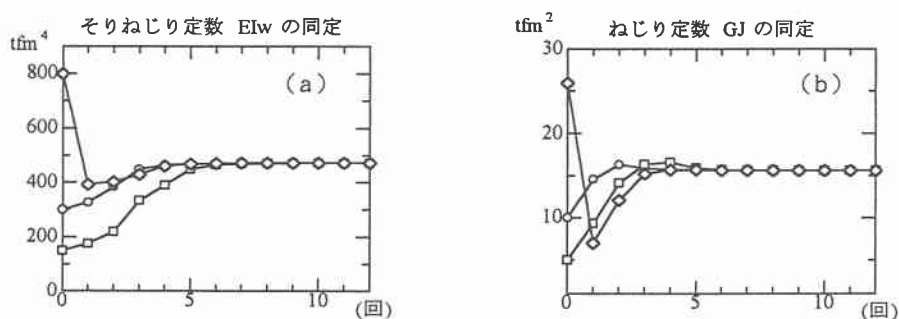


図-3.6 単純げた 集中ねじり荷重 (I形断面)

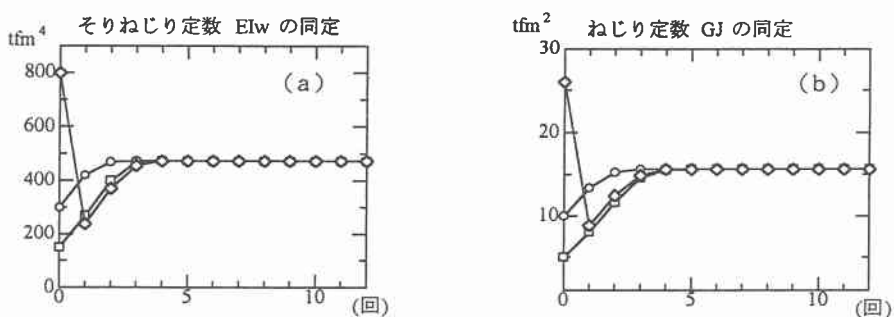


図-3.7 3径間連続げた 集中ねじり荷重 (I形断面)

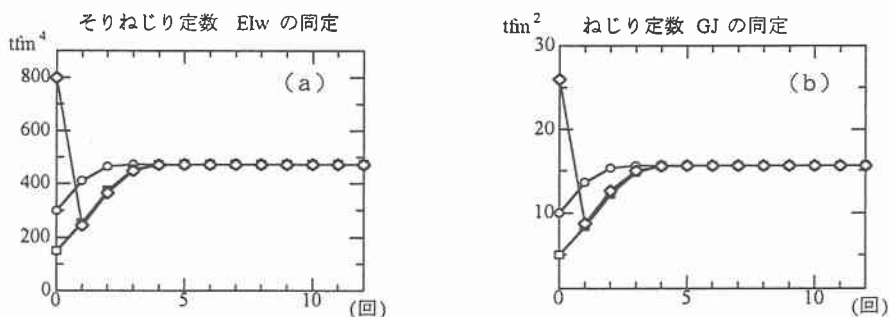


図-3.8 5径間連続げた 集中ねじり荷重 (I形断面)

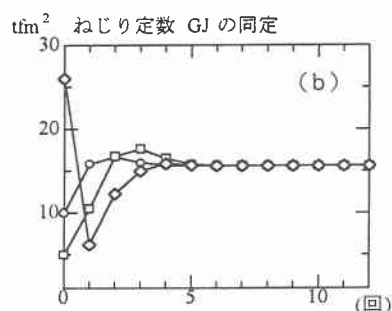
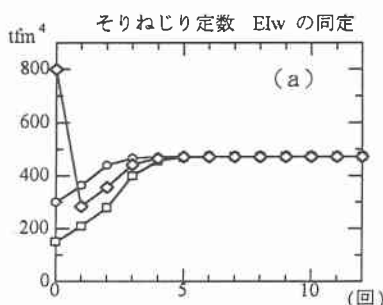


図-3.9 3径間連続げた 等分布満載ねじり荷重 (I形断面)

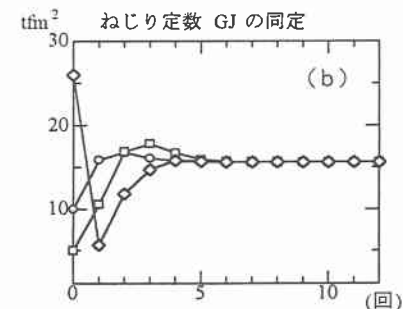
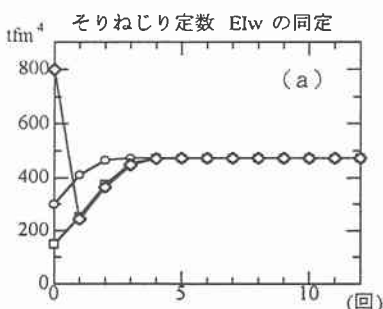


図-3.10 5径間連続げた 等分布満載ねじり荷重 (I形断面)

5. 考察

図-3.1から図-3.10において、3通りの初期値を用いてそりねじり定数 EI_w とねじり定数 GJ を同定したが、断面形状(箱形断面、I形断面)に関係なく、荷重の種類(集中ねじり荷重、等分布満載ねじり荷重)に関係なく、また、径間数(単純げた、3径間連続げた、5径間連続げた)に関係なく、繰り返し計算回数が増えれば4、5回で所定の値に収束していることが分かる。

6. あとがき

拡張カルマンフィルタは直線げたにねじり荷重が作用した場合のねじり定数 GJ およびそりねじり定数 EI_w の同定に有効な手法であることが判明した。

参考文献

- 1) 日本機械学会編：逆問題のコンピュータアナリシス、コロナ社、1983.
- 2) 村瀬治比古、小山修平、石田良平：パソコンによる計算力学 順・逆解析入門、森北出版、1990.
- 3) 須藤敦史、星谷勝：EK-WLI-FEMによるパラメータ同定、土木学会北海道支部論文報告集 第49号、pp.289-294、1993.
- 4) 星谷勝、斉藤悦郎：建設技術者のためのデータ解析と応用 カルマンフィルタを中心として、鹿島出版社、1991.
- 5) 片山徹：応用カルマンフィルタ、朝倉書店、1983.
- 6) 中野道雄、中西清：パソコンで解くカルマンフィルタ、丸善、1993.
- 7) 中井博、事口嘉男：伝達マトリックス法による鋼橋の解析、森北出版、1992.