

# I-36

## スペクトラルエレメント法による積層板の解析

北海道大学工学部 学生員 籠谷 統啓  
 北海道大学工学部 正員 三上 隆  
 北海道大学工学部 正員 佐々木 康彦  
 北海道大学工学部 正員 荻澤 憲吉

### 1. はじめに

一般に有限要素法では、その多項式の次数を固定しておいて、要素の分割を増やしても収束するし、分割数を固定しておいて、多項式の次数を増やしても収束する。最小の計算費用で、最大の精度を得ようとするのが、最良の方法であるのは明らかであるが、現実の最適な方法は、その問題に強く依存し、どの方法が最適であるか証明するのは難しい。

本研究では、スペクトラルエレメント法<sup>1)</sup>を用いて積層板<sup>2)</sup>の静的解析を行い、一般的な有限要素法による結果と比較して、解の精度と計算効率に関する評価を試みる。

### 2. 解析方法

#### 2.1. Reissner-Mindlin の平板理論

板厚方向のせん断変形を考慮した、Reissner-Mindlin の平板理論を拡張した1次せん断変形理論に基づき、歪み-変位の関係式は次式のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

ここで、 $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w$  は中央面の変位であり、 $\phi_x$ ,  $\phi_y$  は  $x$ - $z$  平面,  $y$ - $z$  平面における回転角を表す。

#### 2.2. 積層板の剛性

一般的な合応力成分と歪み成分、曲率成分との関係は次式のように表せる。

$$\begin{Bmatrix} N' \\ M' \\ Q' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' & 0 \\ B' & D' & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\{N'\} = \{N_x \ N_{xy} \ N_{yx} \ N_y\}^T \quad \{M'\} = \{M_x \ M_{xy} \ M_{yx} \ M_y\}^T \quad \{Q'\} = \{Q_x \ Q_y \ Q_x \ Q_y\}^T \quad (2.2)$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \ \frac{\partial u_0}{\partial y} \ \frac{\partial v_0}{\partial x} \ \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\}^T \quad \{\kappa\} = \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right\}^T \quad \{\phi\} = \left\{ \phi_x \ \phi_y \ \frac{\partial w}{\partial x} \ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (2.3)$$

剛性 $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$ ,  $[A'']$  の成分は弾性係数, ポアソン比, 積層状態を与えることによって決定する。

#### 2.3. 変位の仮定

変位  $d$  は節点変位  $d_j$  によって局所座標系で次式のように仮定する。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \ell_i(\xi) \ell_j(\eta) d_{ij} \quad (3.1)$$

$\{d\} = \{u_0 \ v_0 \ \phi_x \ \phi_y \ w\}^T$   $\{d_{ij}\} = \{u_{0ij} \ v_{0ij} \ \phi_{xij} \ \phi_{yij} \ w_{ij}\}^T$   
 $\ell_i(\xi)$ ,  $\ell_j(\eta)$  は Lobatto の数値積分点における Lagrange 補間で次式のように表せる。

$$\ell_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad \ell_j(\eta) = \prod_{i=1, i \neq j}^{N_y} \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_j - \eta_i)} \quad (3.2)$$

#### 2.4. エネルギー

全体の歪みエネルギー  $U$ 、外力エネルギー  $W$  は次式のように表せる。

$$U = \frac{1}{2} \iint \left( \{\varepsilon\}^T [A'] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T [B'] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B'] \{\varepsilon\} + \{\kappa\}^T [D'] \{\kappa\} + \{\phi\}^T [A''] \{\phi\} \right) dx dy \quad (4.1)$$

$$W = \int_A \{d\}^T \{F\} dA \quad (4.2)$$

2.5. 剛性マトリクス

式(2.3),(3.1)と Jacobi 歪みマトリックスより、成分、曲率成分は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [J]^{-1}[\Psi] & 0 \\ 0 & [J]^{-1}[\Psi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B_1] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \{ \kappa \} = \begin{bmatrix} [J]^{-1}[\Psi] & 0 \\ 0 & [J]^{-1}[\Psi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [B_1] \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$
  
$$\{ \phi \} = \begin{bmatrix} \ell_0 \times \ell_0 \cdots \ell_{N_x} \times \ell_{N_y} & 0 & 0 \\ 0 & \ell_0 \times \ell_0 \cdots \ell_{N_x} \times \ell_{N_y} & 0 \\ 0 & 0 & [J]^{-1}[\Psi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix} = [B_2] \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(5.1)$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\xi)}{\partial \xi} \ell_j(\eta) x_i & \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\xi)}{\partial \xi} \ell_j(\eta) y_i \\ \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\eta)}{\partial \eta} \ell_j(\xi) x_i & \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\eta)}{\partial \eta} \ell_j(\xi) y_i \end{bmatrix}^{-1} \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_0(\xi)}{\partial \xi} \ell_0(\eta) \cdots \frac{\partial \ell_{N_x}(\xi)}{\partial \xi} \ell_{N_y}(\eta) \\ \frac{\partial \ell_0(\eta)}{\partial \eta} \ell_0(\xi) \cdots \frac{\partial \ell_{N_y}(\eta)}{\partial \eta} \ell_{N_x}(\xi) \end{bmatrix}$$
  
$$\{u\} = \{u_{00} \cdots u_{N_x N_y}\}^T \quad \{v\} = \{v_{00} \cdots v_{N_x N_y}\}^T \quad \{\phi_x\} = \{\phi_{x00} \cdots \phi_{xN_x N_y}\}^T \quad \{\phi_y\} = \{\phi_{y00} \cdots \phi_{yN_x N_y}\}^T \quad \{w\} = \{w_{00} \cdots w_{N_x N_y}\}^T$$

これより、それぞれの剛性に対する剛性マトリックスは次式のように表せる。

$$[K_1] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [A'] [B_1] \det |J| d\xi d\eta \quad [K_3] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [D'] [B_1] \det |J| d\xi d\eta$$
  
$$[K_2] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [B'] [B_1] \det |J| d\xi d\eta \quad [K_4] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_2]^T [A''] [B_2] \det |J| d\xi d\eta \quad \text{-----}(5.2)$$

全体の剛性マトリックス $[K_e]$ は、この4つの剛性マトリックスを組み合わせるにより得られる。

また外力ベクトル $\{f_e\}$ は式(3.1),(4.3)より形状関数マトリックス $[N]$ を用いて次式のように表せる。

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T \{F\} \det |J| d\xi d\eta \quad \text{-----}(5.3)$$
  
$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} [\Psi'] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\Psi'] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\Psi'] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & [\Psi'] & 0 & 0 & 0 \\ & & [\Psi'] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\Psi'] = [\ell_0(\xi) \times \ell_0(\eta) \cdots \ell_{N_x}(\xi) \times \ell_{N_y}(\eta)]$$

以上より剛性方程式は次式のようになる。

$$[K_e] \{a_e\} = \{f_e\} \quad \{a_e\} = \{u \quad v \quad \phi_x \quad \phi_y \quad w\}^T \quad \text{-----}(5.4)$$

剛性マトリックス $[K_e]$ 、外力ベクトル $\{f_e\}$ は Lobatto の求積法によって導く。

3. 計算例

等分布荷重、単純支持における、辺長 $L$ 、板厚 $h$ の正方形の等方性平板と積層板（4層の逆対称アングルプライ積層 積層角 $\theta = 45^\circ$ ）について次の2つの方法で解析。計算は対称性から板の4分の1の領域をその対象とする。

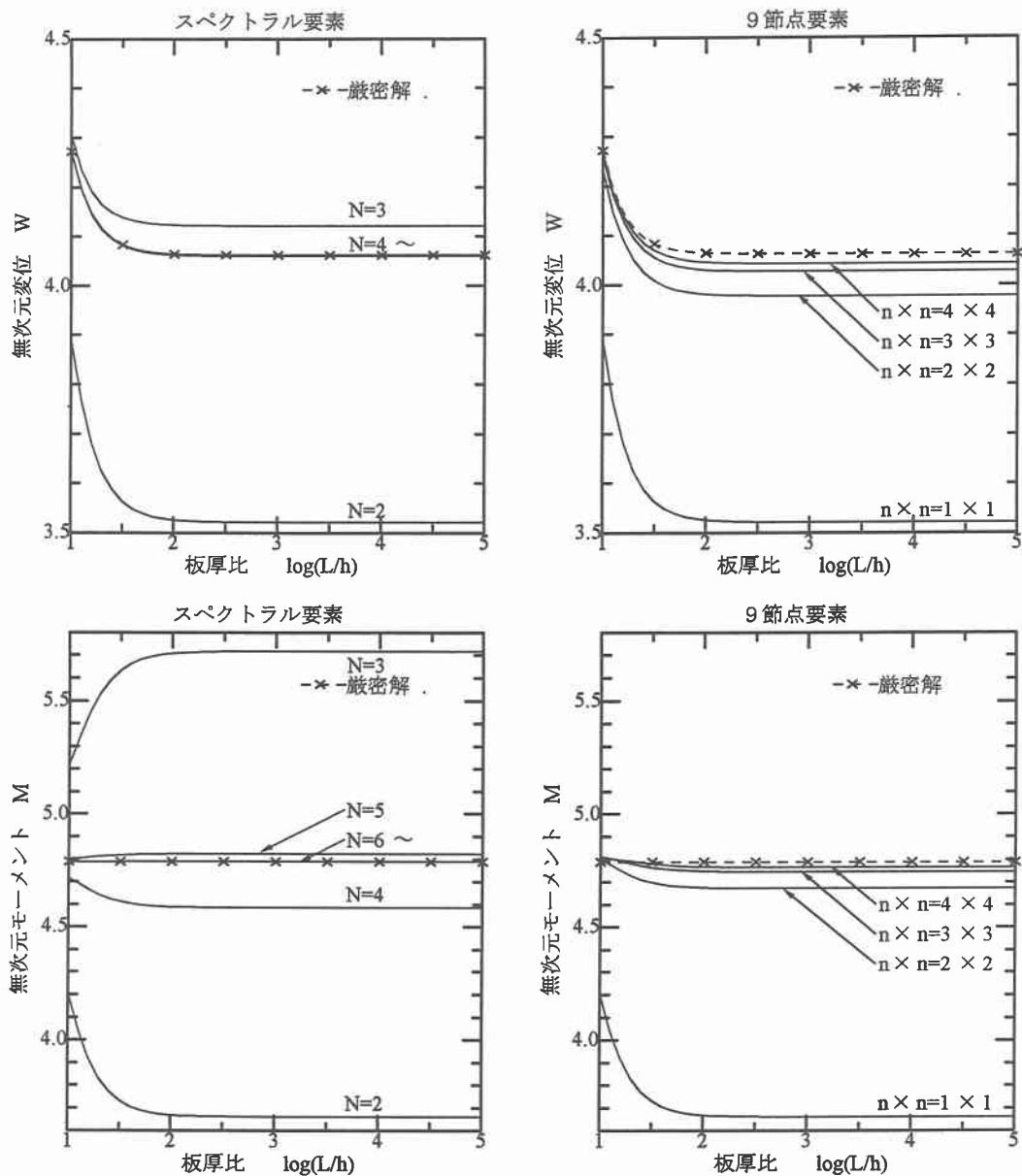
- (1) スペクトラルエレメント法により板の4分の1を1要素とし補間多項式の次数 $N$ を変えて計算。
- (2) 9節点アイソパラメトリック要素法により要素の分割数 $n \times n$ を変えて計算。

4. 結果

板厚比を変化させたときの、板の中央点の無次元変位 $W$ 、無次元モーメント $M$ を等方性平板と積層板それぞれ図-1、図-2に示す。また $L/h = 10^3$ の時の積層板の解析結果を厳密解<sup>3)</sup>と共に次の表-1に示す。

表-1 スペクトラル要素と有限要素の比較

|          | 総節点数  | 36     | 64     | 100    | 144    | 196    | 256    | 324    | 厳密解    |
|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| スペクトラル要素 | 次数    | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | —      |
|          | たわみ   | 4.0359 | 4.4808 | 4.4030 | 4.4090 | 4.4089 | 4.4089 | 4.4089 | 4.4089 |
|          | モーメント | 3.0177 | 4.2779 | 3.3360 | 3.6695 | 3.5941 | 3.6019 | 3.6019 | 3.6019 |
| 9節点要素    | 分割数   | 1×1    | —      | 2×2    | —      | 3×3    | —      | 4×4    | —      |
|          | たわみ   | 4.0359 | —      | 4.3764 | —      | 4.3953 | —      | 4.4014 | 4.4089 |
|          | モーメント | 3.0177 | —      | 3.6219 | —      | 3.6082 | —      | 3.6047 | 3.6019 |



図－1 等方性平板

## 5. まとめ

積層板のスペクトル要素法による解析では、たわみに関しては、要素が少なくても、低い次数である程度の精度の解を得ることが出来、同じレベルの解を9節点アイソパラメトリック要素法で得るには、総節点数を増やさなければならない。また次数を上げるとかなり精度の高い解を得ることができる。モーメントに関しては低い次数での解の精度は良くないが、要素を増やさなくても、少し次数を上げるだけで精度は急速に上がる。以上よりスペクトル要素法による積層板の解析は、静的の場合、解の正確さと計算効率の良さの両方の点ですぐれている。今後は、動的の場合について振動数を同様に比較してその精度と計算効率に関する評価を行う予定である。

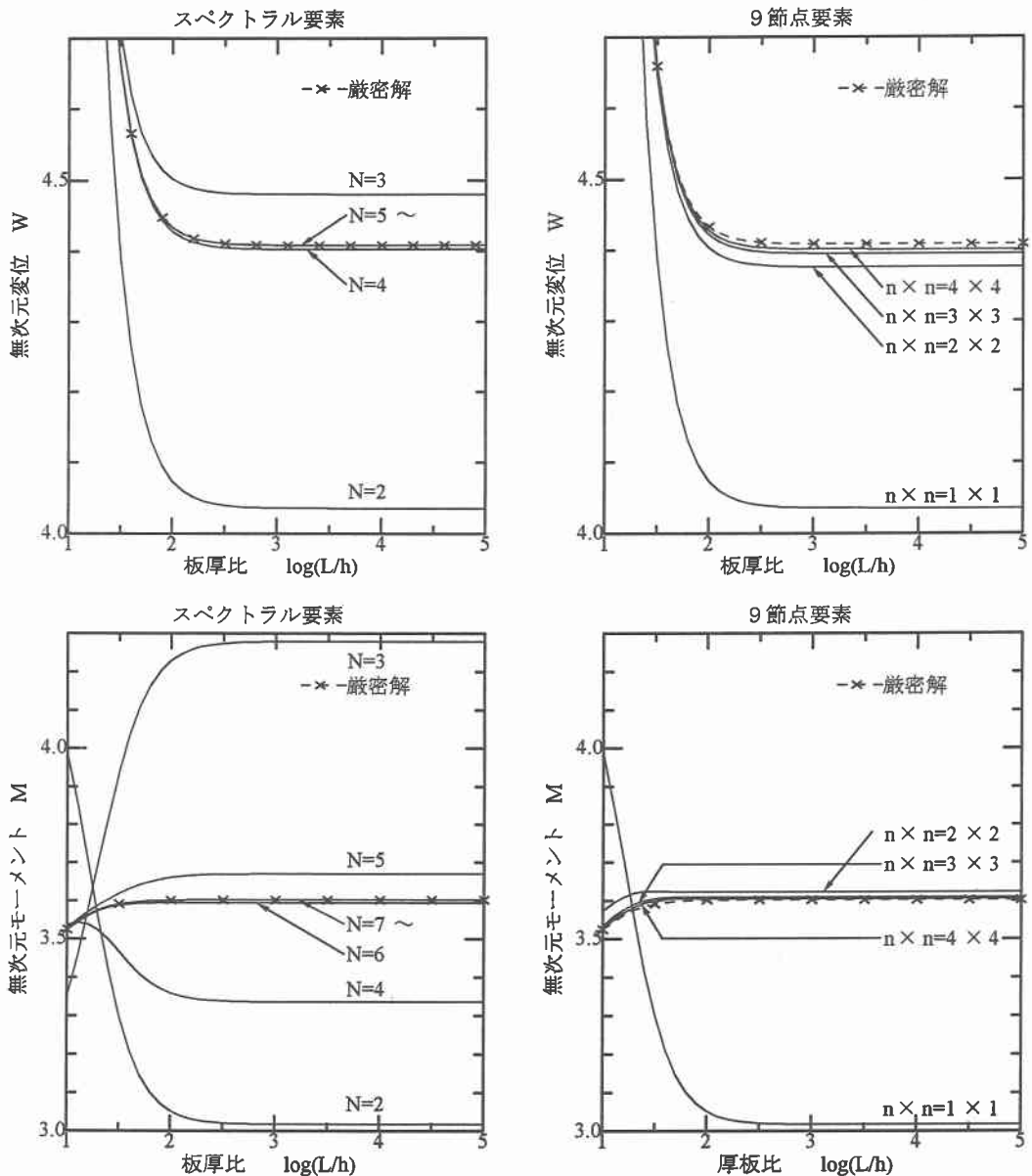


図-2 積層板

#### 参考文献

- 1) Uzi Zrahia and Pinahas Bar-Yoseph : Plate Spectral Elements based upon Reissner-Mindlin Theory  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.38, pp.1341-1360, 1995
- 2) 熊谷清貴・三上隆・芳村仁: 衝撃荷重を受ける積層板の解析  
土木学会北海道支部論文報告集, 第52号, I-53, pp.244-247, 1996
- 3) J.N.Reddy : On the Solutions to Forced Motions of Rectangular Composite Plates  
Journal of Applied Mechanics, vol.49, pp.403-408, JUNE 1982