# Ⅰ－35　　ウェーブレット変換とその応用について

北海道大学　学生員　梅　沢　卓　司
北海道大学　正　員　三　上　　隆
（株）地崎工業　正　員　須　藤　敦　史
北海道大学　正　員　佐々木　康　彦

## 1．はじめに

ウェーブレット解析はここ十年の間にさかんに研究されてきた比較的新しい理論[2]である。それまではフーリエ解析が一般的であったが、これでは周波数解析をする際、時間に関しての情報が全く得られない。この欠点を補おうとして考えられたのがウェーブレット解析である。フーリエ変換では時間データを周波数データに変換するのに対しウェーブレット変換では時間データを時間－周波数データに変換することが可能である。フーリエ変換では、ある与えられた時系列に対してそれを正弦波と余弦波の和で表そうとする。問題なのは正弦波、余弦波が無限に拡がった関数であるため、ある場所の付近だけで関数の形を変化させたいと思ってフーリエ係数を変化させるとその影響は遥か彼方の点にまで及び、簡単な調整ではすまされない。実際に不連続点があるとフーリエ級数の収束性が悪くなる[2]ことが分かる。この問題点を解決するためには、波を局在化してやればよい。そこで考えられたのがウェーブレット解析である。本研究ではウェーブレット変換による時系列データの特異性の検出を行い、その有効性の検討を行う。

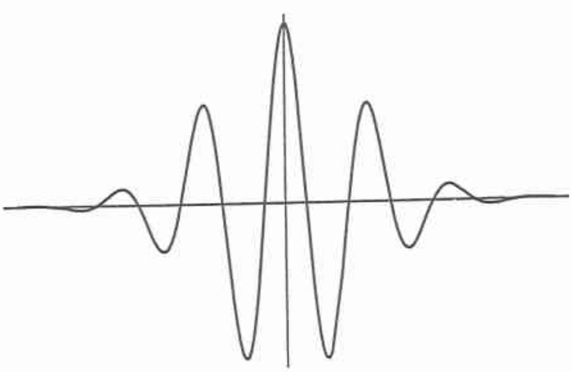
## 2．連続ウェーブレット変換と離散ウェーブレット変換について

### 2.1　連続ウェーブレット変換

先に述べたように局在化した波を考える。そのために波はコンパクトサポートな関数を選ぶ。この局在化した関数$\Psi(t)$をアナライジングウェーブレット（ａｎａｌｉｚｉｎｇ　ｗａｖｅｌｅｔ）[1]（$t$：時間）と呼ぶ。これをフーリエ解析と同じように相似的な変換に加え局在化したための横方向への平行移動をしてやる必要がある。このためパラメータ$a,b$を用いてアナライジングウェーブレットから次の関数系、

$$\psi(a,b)(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad (1)$$

を作りこれをウェーブレット（ｗａｖｅｌｅｔ）と呼ぶ。パラメータ$a,b$はそれぞれ周波数（の逆数）、時間に相当する。このような時間に対応するパラメータ$b$を含む点がフーリエ解析と異なる点である。このウェーブレットを用いて、連続ウェーブレット変換は、ウェーブレットと時系列データとの内積演算を行うことによってウェーブレット係数を求めることができる。この係数はパラメータ$a,b$を変えることによって周波数と時間の情報を得ることができる。



図－１　アナライジングウェーブレット

Wavelet Transform and it's Application
by Takuji UMEZAWA, Takashi MIKAMI, Atsushi SUTOH and Yasuhiko SASAKI

## 2.2　不確定性関係

連続ウェーブレット変換には不確定性関係と言われる関係が存在し、時間と周波数の両方の値を正確に指定することができない。それは連続ウェーブレット変換は直交性条件が成り立たず、かつ一次従属の関係があるために起こる。この問題を解決するためには、その不確定性関係を考慮してウェーブレットを用いるか、ウェーブレットが正規直交基底になればよい。

## 2.3　離散ウェーブレット変換

実際には, 連続ウェーブレット変換を計算することは容易ではないこともあり、時系列データをウェーブレット変換してやるためには、ウェーブレットを離散化してやる必要がある。そのためパラメータ $a,b$ を今の場合、

$$(a,b)=(2^{-j},2^{-j}k),\qquad (j,k\in Z),$$　ただし $Z$ は整数

と置くことにして（1）式よりウェーブレットを、

$$\psi(a,b)=2^{j}\psi(2^{j}t-k)$$

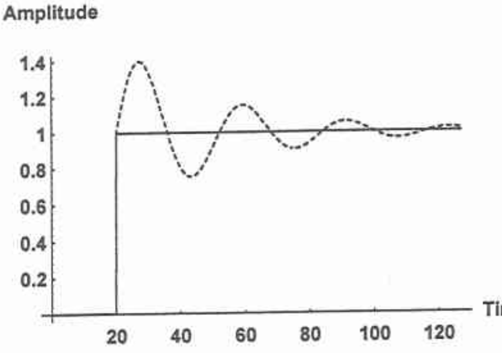
としてやれば、離散ウェーブレット変換を求めることができる。ただし、離散化したウェーブレットが必ずしも正規直交基底関数であるとは限らない[3]ことに注意しなければならない。

## 3．応用例

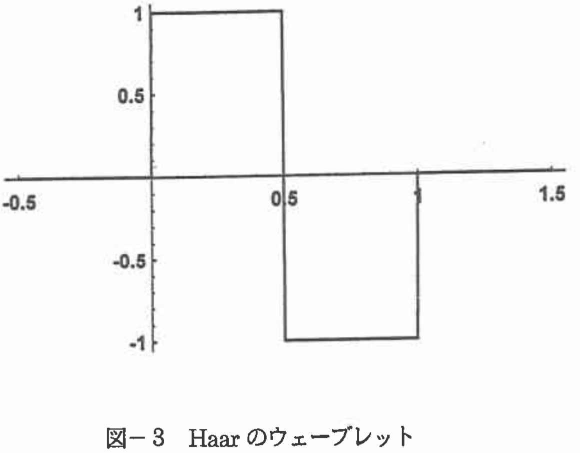
ウェーブレット変換では、特異点で急にウェーブレット係数が大きくなる性質を持っている。以下に示す例は、縦衝撃が加わった棒の実験データなどにウェーブレット変換を施した場合に相当する。用いたデータは、図－2に示す $t=20$ でステップ関数状に立ち上がる場合（実線で示したもので、以下 Case 1 と呼ぶ）と、それに減衰振動的なものを付加した場合（破線、以下 Case 2 と呼ぶ）である。ウェーブレットには 図－3の Haar のウェーブレットを用いた。 Haar のウェーブレットは、離散ウェーブレットが完全正規直交系となる簡単な例[3]で、 以下の式で定義される関数である。

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & (0\le t<\frac{1}{2})\\ -1 & (\frac{1}{2}\le t<1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

この関数は区間［0, 1］の外ではゼロであるから先程述べたように相似的な変換と横方向の平行移動が必要である。

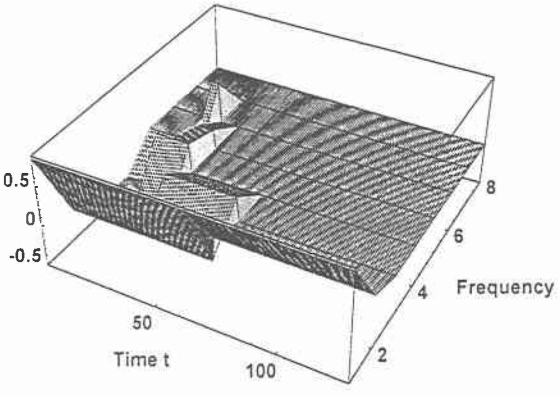



図－2　時系列データ

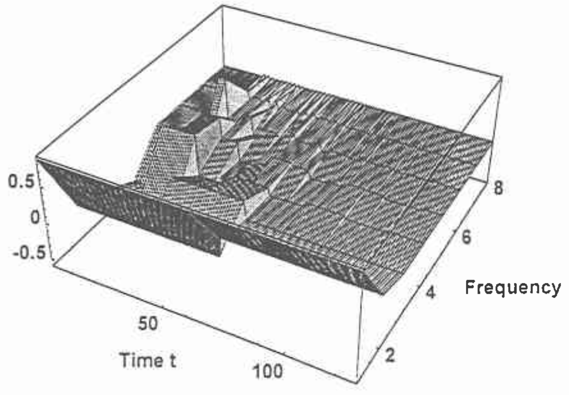



図－3　Haar のウェーブレット

図－4(a)はステップ関数状の時系列データ（Case 1）の場合、図－4(b)は減衰波形の時系列データ（Case 2）のウェーブレット変換の結果である。データのサンプリング個数$N$=128 個、サンプリング間隔$\Delta t$ =1 である。どちらの場合もその不連続点の状態を高周波領域のところで確認できる。

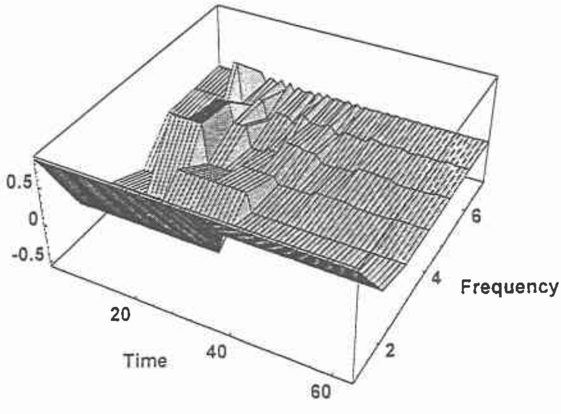



図－4(a)　Case 1 の変換($N$=128)

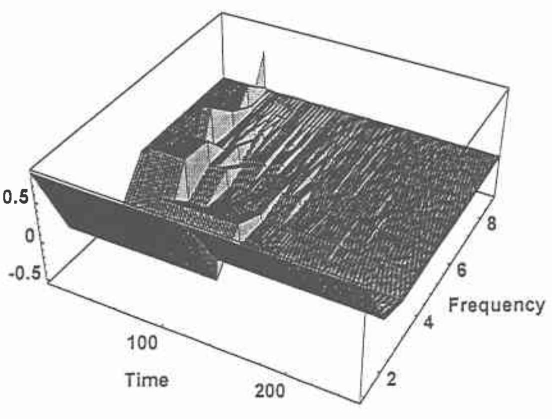



図－4(b)　Case 2 の変換($N$=128)

図－5(a)と図－5(b)はそれぞれ、Case 2 においてサンプリング個数$N$=64,($\Delta t$ =2)と$N$=256,($\Delta t$ =0.5)の場合のウェーブレット変換の結果である。どちらも不連続点の情報を高周波領域で確認できるがサンプリング間隔を短くしてデータ個数を多くしたほうがより正確に時間についての情報を得ることができる。




図－5(a)　Case 2 の変換($N$=64)

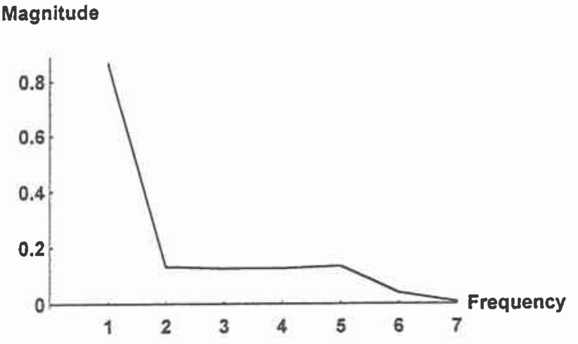



図－5(b)　Case 2 の変換($N$=256)

なお、参考のためにCase 2のデータをフーリエ変換した場合の結果を図－6に示す。最初に述べたようにフーリエ変換では時間についての情報は得られないし高周波領域でも不連続点の状態は確認できない。

## 4．まとめ

不連続点の情報は、ウェーブレット変換ではどの時刻に発生したのかを知ることができる。これに対してフーリエ解析では、発生時刻の情報を得られないどころか不連続点自体の情報すら得ることができない。サンプリングの個数は多いほうが不連続状態が明確である。




図－6　フーリエ変換

参考文献


1）斎藤　兆古：「Mathematicaによるウェーブレット変換」、朝倉書店、1996年

2）山田　道夫：ウェーブレット「第1回　ウェーブレットの考え方と連続ウェーブレット変換の数学的性質」、シュミレーション第14巻第3号、平成7年9月

3）山田　道夫：ウェーブレット「第2回　連続ウェーブレットの応用とウェーブレットの離散化」、シュミレーション第14巻第4号、平成7年12月