Ｉ－34　　エレメントフリーガラーキン法による構造解析

北海道大学工学部　学生員　佐藤　太裕
北海道大学工学部　正　員　三上　　隆
北海道大学工学部　正　員　韮澤　憲吉

１．はじめに

近年、構造解析における偏微分方程式の近似解を求める手法として、有限要素法（ＦＥＭ）が広く用いられている。しかしその一方で、要素分割を必要としない新しい数値解析の手法が考えられつつある。

エレメントフリーガラーキン法（以下ＥＦＧＭ）はそのようないわゆる「グリッドレス法」の１つである。この手法[1), 2)]はＦＥＭのように関数を要素ごとに近似していくのではなく、移動最小二乗法（Moving Least-SquaresMethod）[3)]を用いて局所的に決定する。このことにより、単に解析のために要素分割を必要としないだけではなく、変位の１階微分となるひずみ及び応力に対しても空間連続性が保持されるなど，ＦＥＭに比べ有利な点が多い。本論文では、ＥＦＧＭを一次元常微分方程式の境界値問題（等分布荷重を受ける棒の変位及び応力）や、これまでに適用例が見当たらない自由振動問題（棒の縦振動）に適用し、その妥当性を検討する。

２．計算方法

（１）移動最小二乗法（ＭＬＳＭ）による関数近似

１次元問題について、解析領域内の任意の評価点xにおける内挿関数は次のように表される。

$$u^h(x) = \{p(x)\}^T\left[A^{-1}(x)\right]\left[B(x)\right]\{u\} \tag{1}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
&\{p(x)\}^T = \{1, x\}\\
&A(x) = \sum_{i=1}^{n} w(x-x_i)p(x_i)p^T(x_i)\\
&B(x) = \left[w(x-x_1)p(x_1), w(x-x_2)p(x_2), \dots\dots\dots, w(x-x_n)p(x_n)\right]\\
&\{u\}^T = \{u_1, u_2, \dots\dots\dots, u_n\}
\end{aligned} \tag{2}$$

n ：評価点xの近傍に存在する節点数　　　x_i ：i 番目の節点

$w(x-x_i)$ ：重み関数

である。

本論文では、代表的な重み関数として、以下のものを用いる。

$$w_i(x) = 1.0 - 6.0\left(\frac{x-x_i}{d}\right)^2 + 8.0\left(\frac{x-x_i}{d}\right)^3 - 3.0\left(\frac{x-x_i}{d}\right)^4 \tag{3}$$

d ：サポート半径（＞｜$x-x_i$｜）

重み関数は、サポート半径と、評価点－節点間距離によって決まり、その選択はＭＬＳＭにおいて非常に

Structural Analysis by Element-Free Galerkin Method
by Motohiro SATO, Takasi MIKAMI and Noriyosi NIRASAWA

重要である。

（2）ＥＦＧＭによる解析手法

解析領域は節点とは無関係にバックグラウンドセルにより分割される。セルは剛性方程式を積分する単位であり、各セルの積分にはガウス積分が用いられる。ＭＬＳＭにより各ガウス積分点での内挿関数を求め、それらを重ね合わせ節点値に関して離散化することにより、節点での近似値が求められる。節点値が求められれば、ガウス積分点の時と同様に内挿関数に節点値を代入して任意点における関数値を求めることができる。

３．等分布荷重をかけた棒（一端固定、他端自由）への適用

基本境界条件を与えるためにペナルティー関数法を用いると、積分方程式は（４）式のように表される。

$$\int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{q}{EA} \right) W(x)dx + \frac{du}{dx}(L)W(L) + \alpha u(0)W(0) = 0 \qquad (4)$$

$W(x)$：（ガラーキン法における）重み関数

α ：ペナルティー数

これを節点値に関し離散化することにより、（５）式のような剛性方程式ができる。

$$[K]\{u\} = \{f\} \qquad (5)$$

［K］：剛性マトリクッス

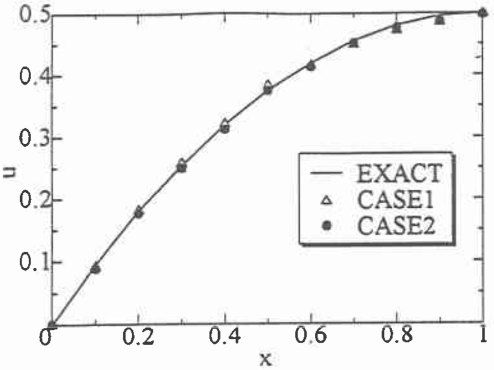
ここでは、$q/EA = 1$、$L = 1$とし、サポート半径を変位、応力それぞれに対し適当な値をとり、各セルにおける積分点数を３とした場合における表－１の条件での計算を行った。これらの計算結果について考察を行う。

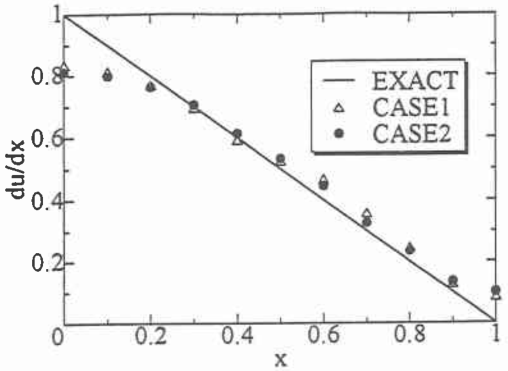
表－１　解析条件

CASE	節点数	セル数	節点分布	α
1	5	3	reguler	100000000
2	5	6	regular	100000000
3	5	6	irregular	100000000
4	5	6	regular	100

（１）セル数による影響

ＣＡＳＥ１とＣＡＳＥ２の比較を図－１に示す。これよりセル数による解の精度への影響はほとんどないことがわかる。セル数が少ないほど計算量も少なくすむので、計算を行う場合はセル数を必要以上に増やす必要はないといえる。

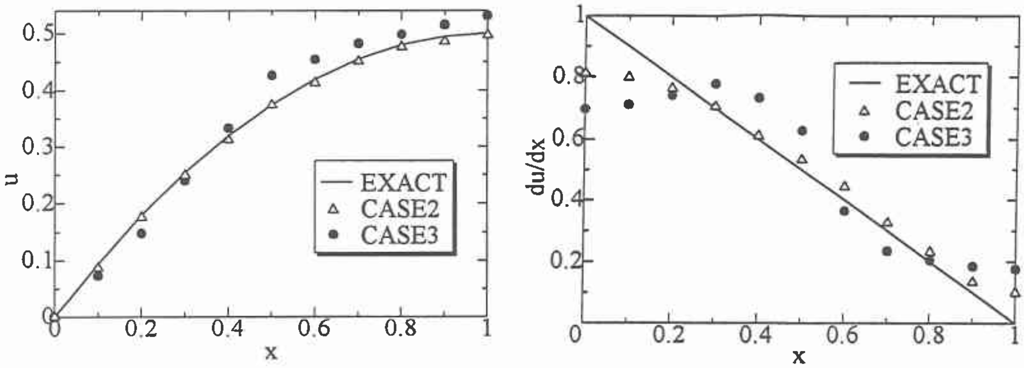




図－１　ＣＡＳＥ１とＣＡＳＥ２の比較

（２）節点分布による影響

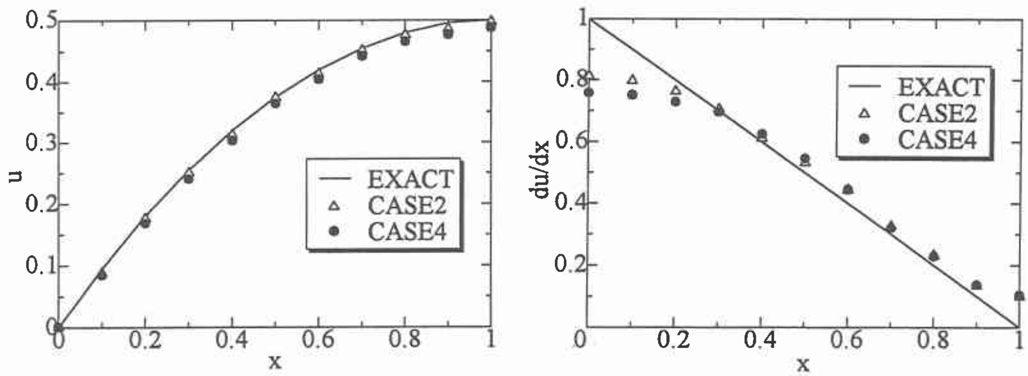
節点を等間隔に配置したＣＡＳＥ２と不規則に配置したＣＡＳＥ３の比較を図－２に示す。図－２から節点は規則的に配置した方がよい結果が得られることがわかる。



図－２　ＣＡＳＥ２とＣＡＳＥ３の比較

（３）ペナルティー数による影響

ペナルティー数のみを変化させたＣＡＳＥ２とＣＡＳＥ４の比較を図－３に示す。図－３よりペナルティー数を大きくとった方が解の精度が良くなることがわかる。



図－３　ＣＡＳＥ２とＣＡＳＥ４の比較

４．棒の縦の自由振動（一端固定、他端自由）への適用

次に自由振動問題（棒の縦振動）における固有振動数ωをＥＦＧＭにより作成した剛性マトリックス［Ｋ］、質量マトリックス［Ｍ］を用いて求めることにより、この手法の妥当性を検討する。

この問題における積分方程式は（６）式のように表される。

$$\int_0^L\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\omega^2u\right)W(x)dx+\frac{du(L)}{dx}W(L)+\alpha u(0)W(0)=0 \qquad (6)$$

表－１のそれぞれのＣＡＳＥの条件により求められた［Ｋ］、［Ｍ］について、（７）式を満たすωを求め、正解と比較する。

$$\det\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \qquad (7)$$

このωに対する正解、ＦＥＭによる計算結果[4]、ＥＦＧＭによる計算結果の比較を表－２に示す。表－２より、条件の良いＣＡＳＥ１とＣＡＳＥ２では全ての次数において、また条件の悪いＣＡＳＥ３とＣＡＳＥ４でも高次の場合において明らかにＦＥＭよりもＥＦＧＭによる計算結果の方が正解に近い値であることが認められる。また、ＣＡＳＥ１からＣＡＳＥ４の比較に関しては、いずれの場合においても解の精度はほぼ３．での検討と同様のことがいえる。

表－２　固有振動数ωの値

振動の次数	1次	2次	3次	4次
正解	π/2=1.571	3π/2=4.712	5π/2=7.854	7π/2=10.996
FEM要素数2	1.611	5.629		
FEM要素数4	1.581	5.987	9.059	13.101
CASE1	1.581	4.745	8.623	12.510
CASE2	1.580	4.848	8.373	11.676
CASE3	1.522	5.282	7.435	11.584
CASE4	1.595	4.892	8.414	11.686

５．まとめ

本論文では、１次元問題についてＥＦＧＭを用いて近似解を求め、正解と比較することによりその妥当性を示した。特に今回は節点が少ないケースであったにもかかわらず、境界値問題、固有値問題とも条件により十分な精度の解が得られることがわかった。

【参考文献】

1）Nayroles, B., Youzot, G. and Villon, P.: Generating the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements, Comput.Mech.,10, pp.307-318,1992

2）Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L.: Element-Free Galerkin Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.37, pp.229-256, 1994

3）Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods, Mathematics of computation, vol.37,pp.141-158,1981

4）川井忠彦：マトリックス法振動及び応答,培風館,pp.133,1974

5）奥田洋司、長嶋利夫、矢川元基：エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討,日本機械学会論文集（A編）、Vol.61、pp.194-200、1995

6）庭山孝史、井浦雅司：Element Free Galerkin Method による Timoshenko 梁の解析、土木学会第51回年次学術講演会講演概要集、Ｉ-A 122、pp.244-245、1996