

I-33

厚板と薄板の座屈および自由振動解析への Mindlin 節点帯板要素の適用について

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力
長岡技術科学大学 正員 林 正

1. まえがき

節点自由度と節線自由度を有する節点帯板法(NSM)は、橋梁構造物などの長大薄肉構造を効率良く計算するために開発された解析法である。この解法を任意形状の構造に適用するために板の曲げ変形に Mindlin 理論を適用し、変位関数に Lagrange 多項式と多項式の級数を用いた Mindlin 節点帯板要素^{1,2)}を開発している。

この要素では、ロッキング現象を回避するために次数低減積分法を採用しており、剛性行列の中に級数項を含む場合の次数低減積分を検討して、Mindlin 帯板要素で用いられている幅方向のみに次数を低減させる積分法³⁾とは別に、級数方向にも次数を低減させる積分法を用いている。さらに、この要素を薄板と薄肉構造物の座屈解析⁴⁾および自由振動解析⁵⁾に適用しており、これらの解析では剛性行列の最高次数に対してせん断成分の級数方向と幅方向の次数を1点ずつ低減させる選択的積分法 B00S11を採用している。

本報告は、文献4)や5)を補足するものであり、座屈解析と自由振動解析での剛性行列の次数低減積分法を検討し、Mindlin 節点帯板要素の薄板と厚板解析への適用性を数値計算により確認した結果を報告する。また、剛性行列とともに、幾何剛性行列や質量行列の並進変位成分と回転変位成分についても次数低減積分を検討しているが、あまり効果がなかったため報告は省略する。

2. 数値計算法

(1) 変位関数

平板の座屈解析と自由振動解析に用いる節点帯板要素には、図-1 に示す 10 個の節点と 5 本の節線を有する 10 節点要素を用いる。節点帯板法の手法により、要素中央面上の変位は節点と節線の自由度の和として表されたとすると、変位関数は次のようになる。

$$w = \sum f_{0n}^T d_n + \sum \sum f_{1i}^T X_m d_m, \quad \theta_x = \sum f_{0x}^T d_n + \sum \sum f_{1xi}^T X_m d_m, \quad \theta_y = \sum f_{0y}^T d_n + \sum \sum f_{1yi}^T X_m d_m \quad (1)$$

式(1)の右辺第1項の $\sum$ は節点 n に関する総和を表し、第2項の $\sum \sum$ は節線 i と級数項 m に関する総和を表す。

式中の f_{0wn} , f_{1wi} などは、節点および節線に関する形状関数ベクトルで次式で与えられる。

$$f_{0wn}^T = \{ f_0(\xi_0) f_i(\eta_0), 0, 0 \}^T, \quad f_{0xi}^T = \{ 0, f_0(\xi_0) f_i(\eta_0), 0 \}^T, \quad f_{0yi}^T = \{ 0, 0, f_0(\xi_0) f_i(\eta_0) \}^T \quad (2)$$

$$f_{1wi}^T = \{ f_i(\eta_0), 0, 0 \}^T, \quad f_{1xi}^T = \{ 0, f_i(\eta_0), 0 \}^T, \quad f_{1yi}^T = \{ 0, 0, f_i(\eta_0) \}^T \quad (3)$$

ここに、 f_i と f_0 は4次と1次のLagrange多項式であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_i(\eta_0) &= \frac{1}{6} \eta_0 (1 + \eta_0) (4\eta^2 - 1) \quad (i = 1, 5), & f_i(\eta_0) &= \frac{8}{3} \eta_0 (1 + 4\eta_0) (1 - \eta) \quad (i = 2, 4) \\ f_i(\eta_0) &= (1 - \eta^2) (1 - 4\eta^2) \quad (i = 3), & f_0(\xi_0) &= (1 + \xi_0) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、 X_m は展開関数で次式の多項式を用いる。

$$X_m(\xi) = (1 - \xi^2) \xi^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

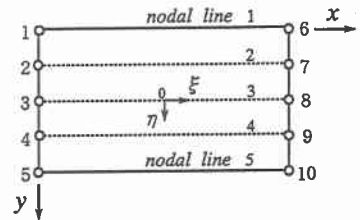


図-1 節点帯板要素 (10 節点要素)

APPLICATION OF MINDLIN NODE-STRIP ELEMENT TO ANALYSE BUCKLING AND FREE VIBRATION OF THICK AND THIN PLATES

By Chikara WATANABE and Masa HAYASHI

表-1 積分手法と積分点数

No.	Integral Method	Bending		Shearing		Note
		ξ	η	ξ	η	
1	B00-S00	m+2	5	m+2	5	Exact
2	B00-S11	m+2	5	m+1	4	Selective
3	B00-S21	m+2	5	m	4	Selective
4	B01-S01	m+2	4	m+2	4	Reduced
5	B01-S11	m+2	4	m+1	4	Reduced
6	B01-S21	m+2	4	m	4	Reduced
7	B11-S11	m+1	4	m+2	4	Reduced
8	B11-S21	m+1	4	m+1	4	Reduced

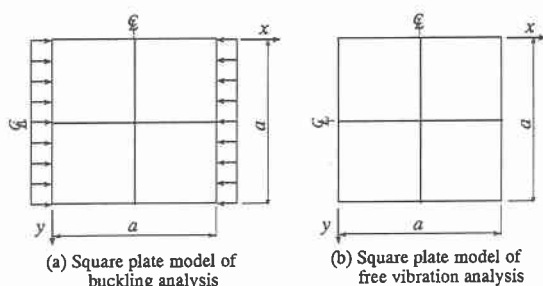


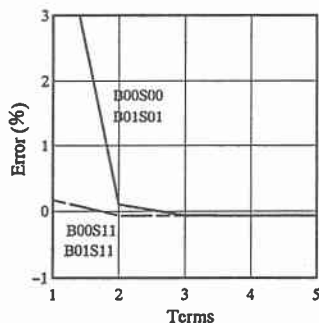
図-2 解析モデル

表-2 厚板 ($t/a = 0.1$) の座屈係数

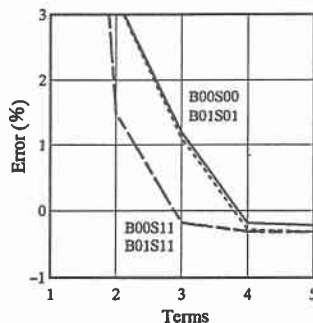
Terms	Simply Supported plate	Clamped plate
1	3.8303	13.5599
2	3.7315	8.2857
3	3.7291	8.0565
4	3.7290	8.0120
5	3.7290	8.0102
FEM	3.7314	8.0238

表-3 厚板 ($t/a = 0.1$) の振動数パラメータ

Terms	Mode (m, n)				
	(1,1)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
1	0.9468	2.2220	3.4918	4.1889	6.6597
2	0.9304	2.2182	3.4467	4.1840	5.2609
3	0.9300	2.2180	3.4023	4.1839	5.2299
4	0.9300	2.2177	3.4021	4.1467	5.1997
5	0.9300	2.2176	3.4021	4.1441	5.1976
Analytical	0.9300	2.2176	3.4018	4.1440	5.1974



(a) 単純支持板



(b) 固定支持板

図-3 薄板 ($t/a = 0.01$) の座屈係数の誤差

(2) 固有値問題

座屈解析⁴⁾での固有値問題は次式で与えられる。

$$[K + \lambda K_G] = 0 \quad (6)$$

自由振動解析⁵⁾では、

$$[K - \omega^2 M] = 0 \quad (7)$$

ここに、 K は節点帯板要素の剛性行列¹⁾で、 K_G は幾何剛性行列⁴⁾、 M は質量行列⁵⁾である。また、 λ は荷重倍率、 ω は固有円振動数である。式(6)と(7)の固有値問題はサブスペース法を用いて計算を行う。

(3) 次数低減積分法

厚板と薄板の座屈解析と自由振動解析を行うための次数低減積分法を検討する。検討する積分法は文献 1)

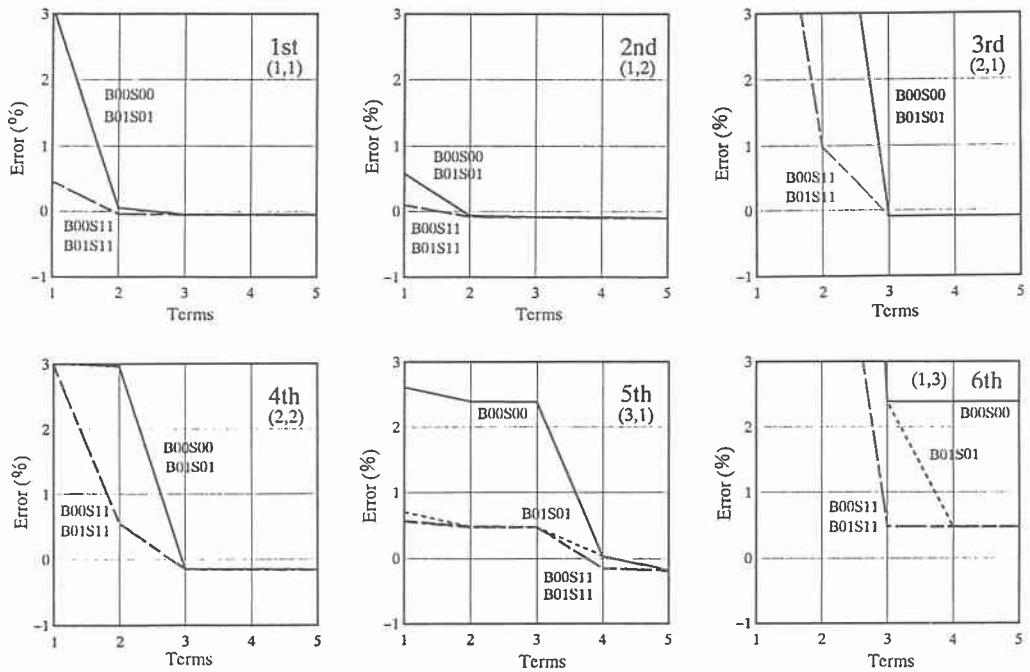


図-4 薄板 ($t/a = 0.01$) の振動数パラメータの誤差 (単純支持板)

と同様の手法を用い、表-1 の 8 通りのガウス数値積分法を検討する。表中の B と S は、それぞれ剛性行列の曲げ成分とせん断成分を表し、2 桁の数字は ξ と η に関する低減数を表す。また、 m は展開項数を表す。なお、 ξ 方向 (級数方向) の低減数は剛性行列 k_{mm} 中の ξ の最高次数に対する低減数を表す¹⁾。

3. 数値計算例

4 辺が単純支持および固定支持された正方形板の座屈解析と自由振動解析を行って、厚板と薄板解析への適用性を検討する。

解析モデルは、板厚 t 、ヤング係数 E 、ポアソン比 ν を 0.3 とし、座屈解析では純圧縮を受ける正方形板を、自由振動解析では板の密度を ρ として計算する。要素分割は、座屈解析と自由振動解析ともに板を図-2 のように 2×2 に分割し、せん断補正係数には厚板の自由振動解析を除き 5/6 を用いている。また、誤差の計算において、厚板解析では Mindlin 理論による解析解、薄板解析では Kirchhoff 理論による解析解を用いている。

(1) 厚板解析

図-2(a)に示す幅厚比 (t/a) 0.1 の単純支持板と固定支持板の座屈解析の結果を、8 節点アイソパラメトリック要素を用いて 16×16 に細分割した FEM 解⁶⁾と比較した結果を表-2 に示す。剛性行列の積分方法には厳密積分 (B00S00) を用い、表-2 では次式の座屈係数 k を用いている。

$$\sigma = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (8)$$

単純支持板では級数に 3 項用いると収束しているが⁸⁾、固定支持板では単純支持板に比べ収束性は若干悪くなる。級数に 3 項用いたときの誤差は、細分割した FEM 解に対して単純支持板で 0.1% 以下、固定支持板では 0.5% 以下である。

図-2(b)に示す t/a が 0.1 の単純支持板の自由振動解析の結果を Mindlin 板理論⁷⁾と比較し表-3 に示す。表中

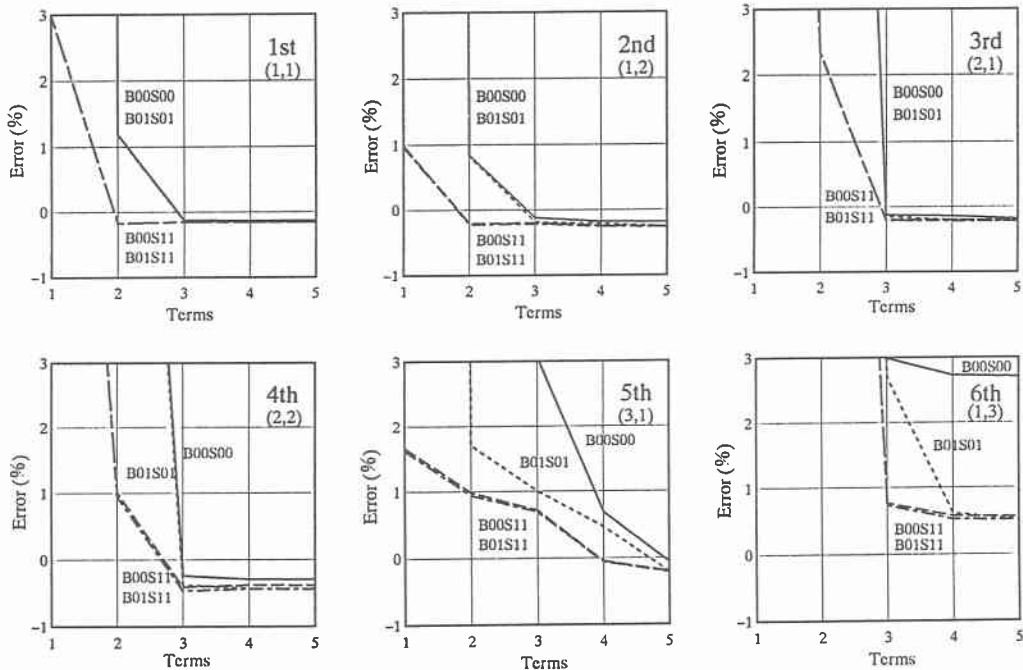


図-5 薄板 ($t/a = 0.01$) の振動数パラメータの誤差 (固定支持板)

の (m, n) は x 軸方向と y 軸方向の半波長数を表す。積分方法には厳密積分を、せん断補正係数には $\pi^2/12$ を用いて、次式で与えられる振動数パラメータ λ を用いて表している。

$$\lambda = \omega \left(2(1+\nu) \rho a^2 / E \right)^{1/2} \quad (9)$$

高次のモードの振動数まで安定した収束性が得られており、その収束値の Mindlin 板理論に対する誤差は僅か 0.01% 以下となっている。

(2) 薄板解析

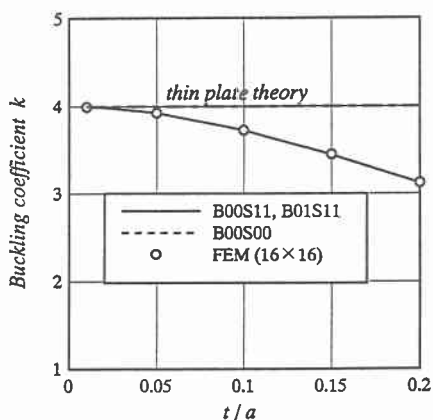
薄板の座屈解析と自由振動解析に用いる次数低減積分法の精度と収束性を調べる。表-1 の全て積分法を検討した結果、座屈解析と自由振動解析ともに曲げひずみエネルギーの級数 (ξ) 方向を低減させる B11 とせん断ひずみエネルギーの ξ 方向を 2 点低減させる S21 では、40% 以上の誤差が生じた。ここでは、良好な解が得られた低減積分 B01S11 と B01S01、選択的積分 B00S11 および厳密積分 B00S00 を比較した結果を示す。

解析モデルは、 t/a が 0.01 の単純支持板と固定支持板で材料定数は厚板解析と同じとする。

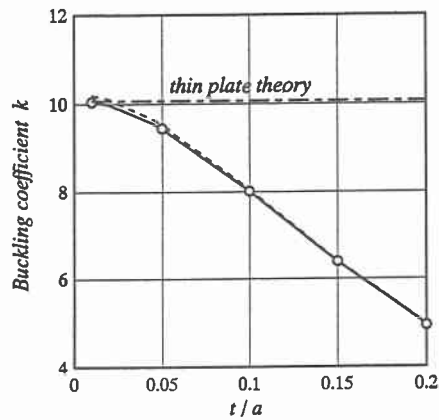
座屈解析の結果を図-3 に示す。図の縦軸は式(8)で与えられる座屈係数の解析解⁹⁾ (単純支持板 4.000, 固定支持板 10.08) に対する誤差 (%) を示し、横軸には解析に用いた級数項をとった。また、実線は厳密積分 B00S00, 破線は選択積分 B00S11, 一点鎖線は低減積分 B01S11, 点線は B01S01 を用いた結果を示している。

単純支持板と固定支持板ともに、厳密積分 B00S00 と Mindlin 帯板要素で用いられている低減積分 B01S01 は同様の傾向を示している。級数方向にもせん断ひずみエネルギーの低減を行う B00S11 と B01S11 のほうが厳密積分や B01S01 に比べ収束性が良く、単純支持板では 1 項でほぼ収束しており、固定支持板で 3 項で収束している。そのときの誤差は、単純支持板で 0.1% 以下で、固定支持板では 0.4% 以下となっている。

自由振動解析の結果を図-4 と図-5 に示す。図の縦軸は振動数パラメータの解析解⁹⁾ に対する誤差を、横軸には解析に用いた級数項をとった。また、図中の線の種類は座屈解析と同様であり、単純支持板と固定支持



(a) 単純支持板



(b) 固定支持板

図-6 選択的積分法による座屈係数

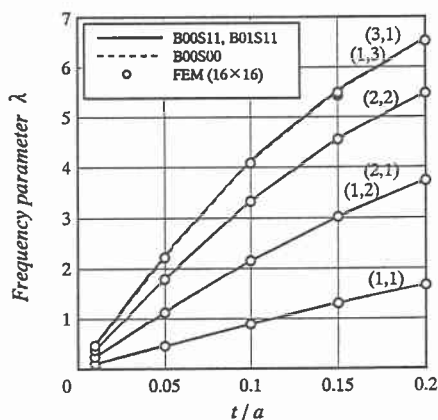


図-7 選択的積分法による振動数パラメータ

板ともに1次モードから6次モードまでの結果を示してある。

自由振動解析でも、級数方向にせん断ひずみエネルギーを低減する B00S11 と B01S11 のほうが収束がよい。また、高次のモードでは厳密積分による誤差が大きくなるが、低減積分や選択積分では安定した収束性と精度の良い解が得られている。

(3) 積分法の適用範囲

幅厚比の変化に応じた次数低減積分法の適用範囲を調べるために、図-2 に示す厚板の座屈解析と自由振動解析に低減積分法を用いる。

積分方法には、B00S11 と B01S11 を使用し、級数には3項用いた。幅厚比を0.01~0.2まで変化させたときの、座屈係数と振動数パラメータの値を16×16に細分割したFEM解⁶⁾と比較する。

図-6 に座屈係数の値を示す。B00S11 と B01S11 を用いたときには、単純支持板と固定支持板ともにFEM解と良く一致しているが、厳密積分 B00S00 を用いた場合には固定支持板で板厚比が小さい場合に若干の誤差が生じている。

また、図-7 には単純支持板の振動数パラメータの値を示す。自由振動解析でも、1~6次モードまでFEM解と良く一致している。

以上より、B00S11 と B01S11 は薄板から厚板の座屈解析と自由振動解析に適用でき汎用的な積分方法と言

える。

4. 結 論

Mindlin 節点帯板要素に次数低減積分法を用いて、厚板と薄板の座屈および自由振動解析を数値計算例により検証した結果より次のようなことが言える。

- (1) Mindlin 節点帯板要素は、薄板と厚板の座屈解析および自由振動解析において、精度の良い解が得られる。
- (2) 剛性行列のせん断成分の級数方向を低減させる積分法 (B00S11, B01S11) は、厳密積分に比べ収束性が良く、薄板から厚板までの座屈解析と自由振動解析に適用できる。

本研究のデータ整理において、当時函館工業高等専門学校卒業生であった中川昭彦君（日特建設（株））と大島史嗣君（（株）森川組）に協力を頂いた。記して感謝の意を表します。また、本研究は笹川科学研究助成の援助を受けたことを付記する。

参考文献

- 1) 林 正・坂口隆紀：Mindlin 節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析，土木学会論文集，No.459/I-22，PP.93-101，1993.
- 2) 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の立体解析，構造工学論文集，Vol.41A，PP.435-442，1995.
- 3) Onate, E., and Suarez, B.: A comparison of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip elements for the analysis of thick and thin plates, *Computers & Structures*, Vol.17 No.3, pp.427-439, 1983.
- 4) 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の座屈解析，土木学会論文集，No.525/I-33，PP.17-26，1995.
- 5) 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の自由振動解析，土木学会論文集，No.549/I-37，PP.141-148，1996.
- 6) NISA II ユーザーズ・マニュアル version 93.0: Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.
- 7) Dawe, D.J.: Finite strip models for vibration of Mindlin plates, *J. Sound and Vibration*, Vol.59, pp.441-452, 1978.
- 8) Column Research Committee of Japan: *Handbook of structural stability*, Corona publishing company, 1973.
- 9) Leissa, A.W.: The free vibration of rectangular plates, *J. Sound and Vibration*, Vol.31, pp.257-293, 1973.