

I-32

写像を用いた一次元半無限問題の解析

北海道大学	学生員	石田 高啓
北海道大学	正員	三上 隆
北海道大学	正員	佐々木康彦
釧路工業高等専門学校	正員	芳村 仁

1. はじめに

半無限問題は、多くの現実の問題に現れる。無限領域の問題の解法は大別して2つの方法が考えられる。第1の方法は外部境界を遠くであるが有限の距離のところに固定し、その境界までの領域だけを離散化するものである。この方法は、多数の離散点が必要であり、また十分遠い所としてどの程度の距離の所を選べばよいかという問題が生じるが、実際の解法としてよく用いられる。第2の方法は、直接的に無限遠に広がる領域を扱うものである。ここでは、後者の方法を取りあげ、無限領域を有限領域に写像する方法の適用可能性の基本的な検討を行った。

2. 解析方法

半無限問題の例として、以下の2つの問題を取り上げる。

例題1 厳密解が指数型の場合

次の微分方程式と境界条件の問題を扱う。

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = A^2 w \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x=0 \text{ で } w=w_0, \quad x=\infty \text{ で } w=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで A = 定数である。厳密解は次式である。

$$w = w_0 \exp(-Ax) \quad \dots\dots\dots(3)$$

無限領域 ($0 \leq x < \infty$) を有限領域 ($0 \leq \xi < 1$) に写像する方法に指数写像(exponential map)と代数写像(algebraic map)を用いる¹⁾。

$$\text{指数写像: } \xi = 1 - e^{-x/L} \quad \dots\dots\dots(4 \cdot a)$$

$$\text{代数写像: } \xi = x/(L+x) \quad \dots\dots\dots(4 \cdot b)$$

ここで、 L は $\xi=1$ への収束の度合いを表す尺度であり、その様子を図-1に示す。この図より、 L の値が小さい程 $\xi=1$ への収束は早く、また L = 一定では、指数写像が代数写像よりも $\xi=1$ への収束が早いことがわかる。

式(4)を用いて独立変数 x を ξ に変換すれば、式(1)と式(2)は以下となる。

指数写像の場合；

$$(1-\xi)^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} - (1-\xi) \frac{dw}{d\xi} - A^2 L^2 w = 0 \quad \dots\dots\dots(5 \cdot a)$$

$$\xi=0 \text{ で } w=w_0, \quad \xi=1 \text{ で } w=0 \quad \dots\dots\dots(5 \cdot b)$$

代数写像の場合；

$$(1-\xi)^4 \frac{d^2 w}{d\xi^2} - 2(1-\xi)^3 \frac{dw}{d\xi} - A^2 L^2 w = 0 \quad \dots\dots\dots(6 \cdot a)$$

$$\xi=0 \text{ で } w=w_0, \quad \xi=1 \text{ で } w=0 \quad \dots\dots\dots(6 \cdot b)$$

例題2 厳密解が双曲線型の場合

以下の微分方程式と境界条件の場合を扱う。

Numerical Solution of Problems in Semi-Infinite Domain by Coordinate Transforms
by Takahiro Ishida, Takashi Mikami, Yasuhiko Sasaki and Jin Yoshimura

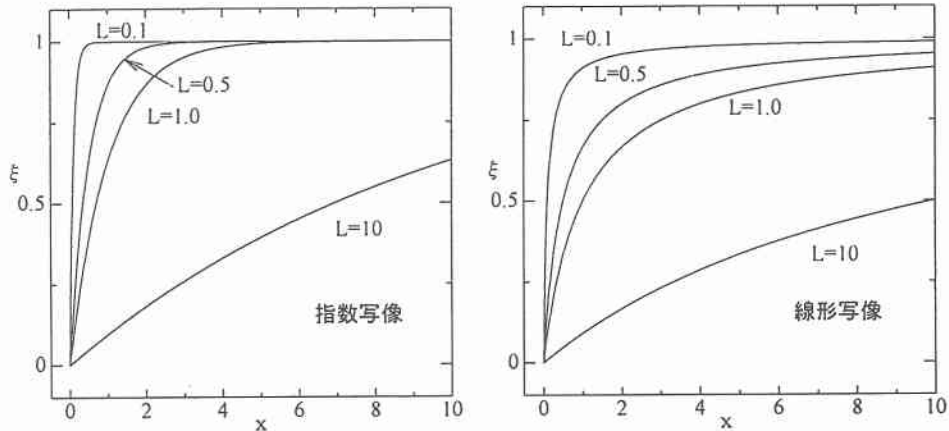


図-1 ξとLの関係

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$r = R_0 \text{ で } \sigma_r = -P_r, \quad r \rightarrow \infty \text{ で } w = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

厳密解は次式で与えられる。

$$w = \frac{P_r(1+\nu)R_0^2}{E} \cdot \frac{1}{r} \quad \dots\dots\dots(9)$$

例題1と同様に無限領域 ($0 \leq r < \infty$) を次の写像により有限領域に変換する。

$$\text{指数写像: } \xi = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{L}(r - R_0)\right\} \quad \dots\dots\dots(10 \cdot a)$$

$$\text{代数写像: } \xi = \frac{r - R_0}{r + L} \quad \dots\dots\dots(10 \cdot b)$$

式(10)を用いて独立変数 r を ξ に変換すれば、式(7)は以下ようになる。

指数写像の場合：

$$(1-\xi)^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \left\{ -1 + \frac{1}{R_0/L - \ln(1-\xi)} \right\} (1-\xi) \frac{dw}{d\xi} - \left\{ \frac{1}{R_0/L - \ln(1-\xi)} \right\}^2 w = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

代数写像の場合：

$$\frac{(1-\xi)^2}{(L+R_0)^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{1-\xi}{L+R_0} \left\{ -\frac{2}{L+R_0} + \frac{1}{L\xi+R_0} \right\} \frac{dw}{d\xi} - \frac{1}{(L\xi+R_0)^2} w = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

なお、式(5),(6),(11),(12)の解法には、Legendre 多項式の零点を選点する選点法²⁾によった。

3. 数値計算例

例題1の結果：

$w_0 = 1$ 、選点数 N に $N=11$ を用いて、 $A=0.1$ および $A=1.0$ に対して、それぞれ $L=1, 5, 10, 100$ および $L=0.1, 0.5, 1, 10$ と変化させて計算を行った。結果を図-2および図-3に示す(実線は厳密解)。これによれば、代数写像の場合(式(6))の結果は、 A と L の値によらず厳密解によく一致するが、指数写像の場合(式(5))には、 A と L の積が $AL \ll 1$ のときは厳密解に一致していないことが分かる。なお、これは、厳密解 $w = w_0 \exp(-Ax)$ を式(4・a)を用いて ξ に変換すれば、 $w = w_0(1-\xi)^{AL}$ と表されるが、その ξ に関する一次導関数 $\partial w / \partial \xi$ の $\xi \rightarrow 1$ における極限值が $AL < 1$ で $\partial w / \partial \xi \rightarrow \infty$ になることに対応している。

例題2の結果：

$R_0=0.1$ および $R_0=10$ に対して、選点数 $N=11$ とし、それぞれ $L=0.01, 0.05, 0.1, 1.0$ および $L=1.0, 5.0, 10., 100.0$ の結果を図-4 および図-5 に示す(実線は厳密解)。いずれの写像を用いても、良好な解が得られたが数値的な比較を行えば代数写像の方が良かった。なお、この例題についても極限值は例題1と同様なものである。

4. まとめ

半無限問題の数値解析法として写像（代数写像と指数写像）による解法を示し数値計算例（解が指数型と双曲線型）によりその有効性の検討を行った。その結果、代数写像による場合が良好な解を与えることが明らかになった。

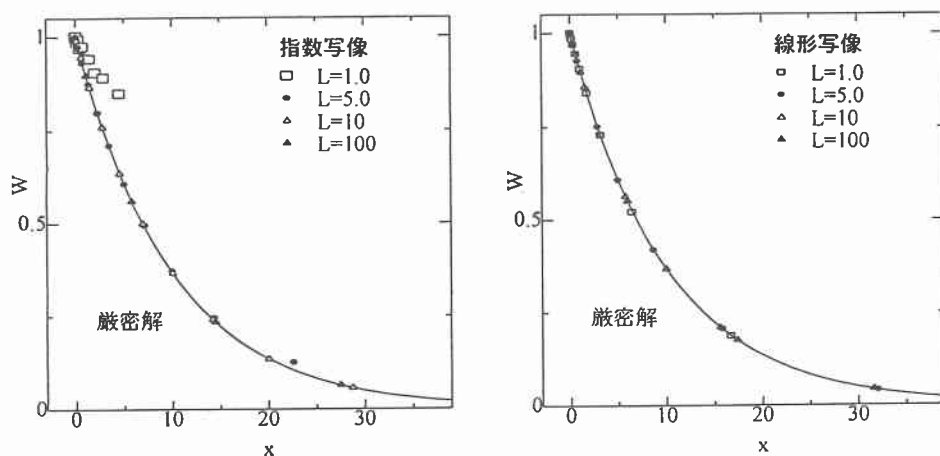


図-2 Lの解に与える影響（例題1：A=0.1）

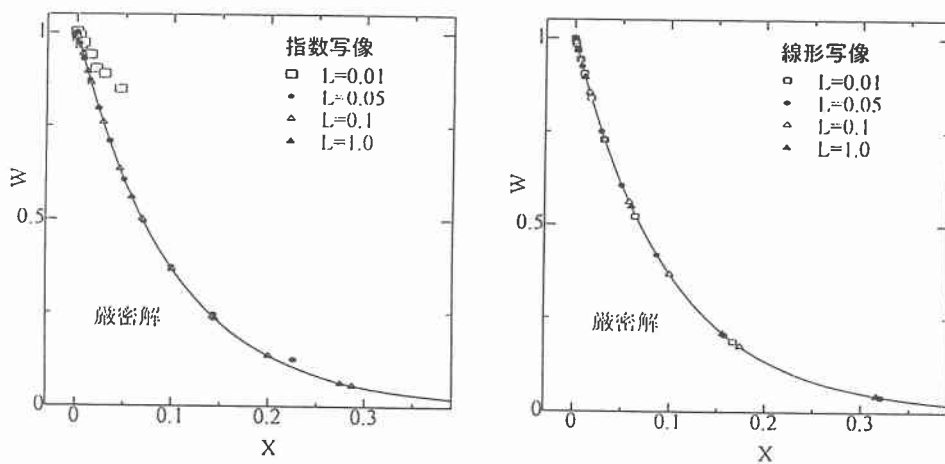


図-3 Lの解に与える影響（例題1：A=10）

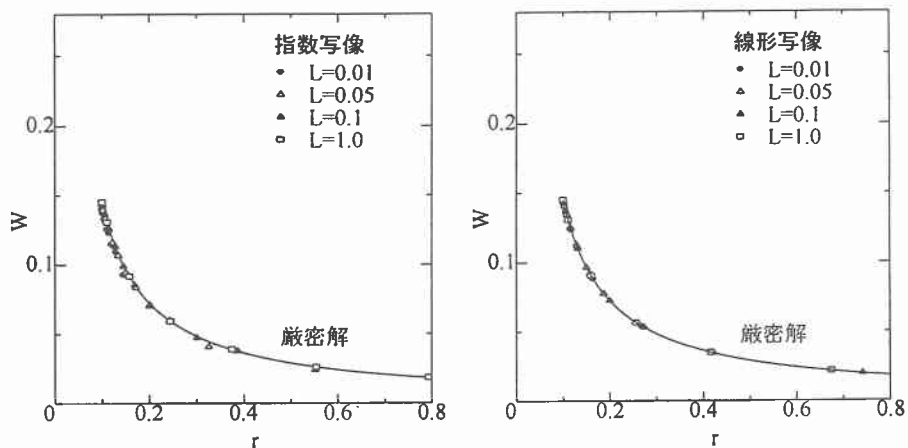


図-4 L の解に与える影響 (例題2: $R_0=0.1$)

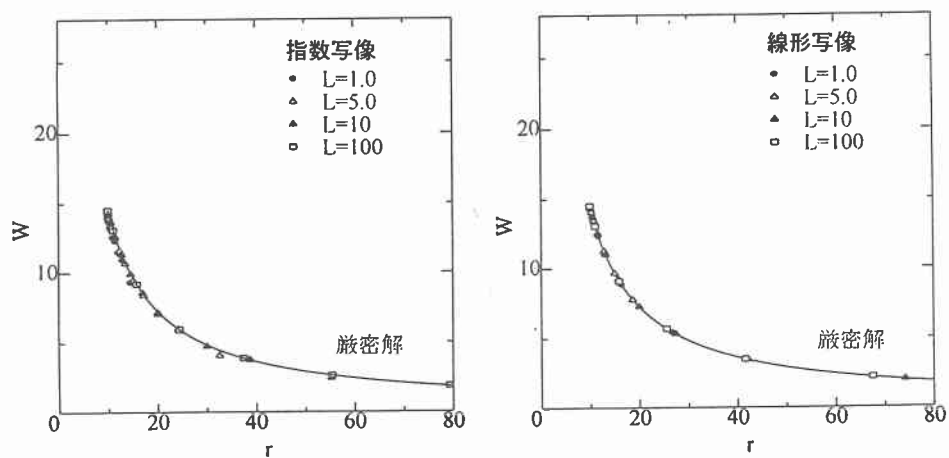


図-5 L の解に与える影響 (例題2: $R_0=10$)

参考文献

- 1) C. Canuto, et al.: Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer - Verlag, 1986.
- 2) T. Mikami and J. Yoshimura: Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.7, No.2, 1990.