

I-18

重錘落下による矩形床版の弾性衝撃応答解析

専修大学北海道短期大学 正員 三上敬司 室蘭工業大学 正員 松岡健一
 室蘭工業大学 正員 岸 徳光 日本大学生産工学部 フェロー 能町純雄

1. まえがき

平版の衝撃応答解析で扱う板理論には、古典板理論である薄板理論や薄板理論に板の回転慣性とせん断変形を考慮して修正した Mindlin 板理論などがある¹⁾。古典板理論による衝撃応答解析に関する研究は、大沼が無限平版へ平底の剛体を落下させた場合の解析を、岩崎らが弾性床上の無限平版へ球底の剛体を落下させた場合の解析を板の局部変形を考慮に入れて行ない、衝撃力等を求めている^{2),3)}。一方、Mindlin 板理論における衝撃応答解析に関して、Reismann は固有関数展開法によってリングや矩形板の衝撃応答解析を行い両理論の相違について検討している^{4),5)}。同様な解析法を用いて、Chandrasekaran らは周辺単純支持と固定端における軸対称有限円版の衝撃応答解析を行い、板厚、載荷継続時間、荷重分布および形状などが板の動的挙動に及ぼす影響に関して検討している⁶⁾。三上らはロックシェッドに作用する落石の衝撃力を評価するために、四辺単純支持された矩形床版を両理論を用いてモード解析を行い、それらの動的挙動に関して比較検討している⁷⁾。一般的には仮定した衝撃荷重を用いて板の動的挙動を検討している研究が多く、重錘落下による衝撃力を評価している文献としては著者の知る限りでは 2), 3) ぐらいであり、この種の研究成果があまり多く見当たらないようである。特に、有限円版および矩形床版に関する研究はほとんど見当たらない。

以上のことを踏まえて、本論文では古典板理論によるモード解析を用いて、平底重錘落下による四辺単純支持された矩形床版の弾性衝撃挙動を検討するために、Hertz の局部変形を考慮に入れた衝撃力、床版のたわみ、ひずみおよび支点反力を求めることとする。

2. 理論解析

図-1 に示したように、質量 M 、半径 r_0 の平底剛体が四辺単純支持された矩形床版の中央点に落下した場合の衝撃挙動について古典板理論を用いて理論解析する。境界条件は、 x 方向の辺長を a 、 y 方向の辺長を b にとって、たわみの振動モード形 $\phi_{mn}(x,y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ と置くことによって満足する。基準座標 $Q_{mn}(t)$ とすれば、鉛直方向のたわみは、1) 式のように表される。

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \phi_{mn}(x,y) \quad 1)$$

古典板理論における板の振動方程式は次式となる。

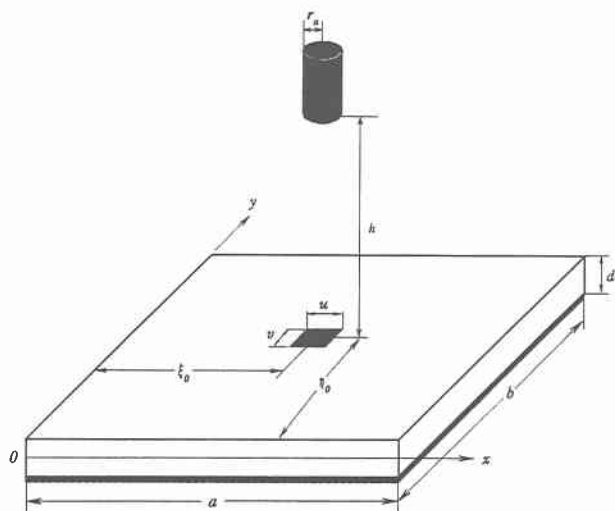


図-1 平底重錘落下衝撃を受ける四辺単純支持矩形床版

Dynamic Response Analysis of Rectangular Plate under Impact Loading

by Takashi MIKAMI, Ken-ichi G. MATSUOKA, Norimitu KISHI and Sumio G. NOMACHI

$$\rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w = q(x, y, t) \quad \text{ただし, } \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2)$$

固有振動数を ω_{mn} として 2) 式の右辺の荷重項 $q(x, y, t) = 0$ とおいた自由振動式より固有振動数を求めると,

$$\Delta^2 \phi_{mn}(x, y) = \frac{\rho d}{D} \omega_{mn}^2 \phi_{mn}(x, y) \quad \text{より} \quad \omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho d} \left\{ \left[\frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b} \right]^2 \right\}} \quad \text{となる.} \quad (3)$$

ここで, 板の曲げ剛性: $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$, ρ : 板の密度, d : 板の厚さ

いま, $\ddot{Q}_{mn}(t) = \frac{d^2 Q_{mn}(t)}{dt^2}$ とおいて, 2) 式に 1) 式を代入すると

$$\rho d \phi_{mn}(x, y) \ddot{Q}_{mn}(t) + D \Delta^2 \phi_{mn}(x, y) Q_{mn}(t) = q(x, y, t) \quad (4)$$

上式に 3) 式を代入し, 両辺に $\phi_{kl}(x, y)$ を掛けて板全体について積分すると

$$(\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t)) \int_0^a \int_0^b \phi_{mn}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \frac{1}{\rho d} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \phi_{kl}(x, y) dx dy \quad (5)$$

次に 5) 式の両辺を時間に関して Laplace 変換して基準関数を求めると

$$L[Q_{mn}(s)] = \frac{1}{\rho d N_{mn}^2 (s^2 + \omega_{mn}^2)} \int_0^a \int_0^b L[q(x, y, s)] \phi_{mn}(x, y) dx dy \quad (6)$$

ただし, $L[\dots]$ はラプラス変換記号である. N_{mn} はノルムであり, 直交条件を以下に示す.

$$N_{mn}^2 = \int_0^a \int_0^b \phi_{mn}(x, y) \cdot \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & (m \neq k, n \neq l) \\ \frac{ab}{4} & (m = k, n = l) \end{cases}$$

矩形版上の任意の点 $x = \xi_0$, $y = \eta_0$ に集中外力 P が作用する場合を考える. この場合は, ディラックの δ 関数を用いて分布荷重 $q(x, y, t)$ を以下のように表すと

$$q(x, y, t) = P(t) \delta(x - \xi_0) \delta(y - \eta_0) \quad (7)$$

1) および 7) 式をラプラス変換して 1) 式を整理すると

$$L[w(x, y, s)] = \frac{1}{\rho d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L[P(s)]}{N_{mn}^2 (s^2 + \omega_{mn}^2)} \phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \phi_{mn}(x, y) \quad (8)$$

$$\text{ただし, } \phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) = \sin \frac{m\pi\xi_0}{a} \sin \frac{n\pi\eta_0}{b}$$

次に, 質量 M を持つ平底剛体が矩形版の中央点に落下した場合, 矩形版の局部変形を δ_0 および中立軸の中心たわみ w_0 とすると, 剛体の運動方程式は, 次式となる.

$$M \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} + M \frac{d^2 w_0}{dt^2} + P(t) = 0 \quad (9)$$

いま, 初期条件 $t=0$ で $V_0 = \sqrt{2gH}$ (g : 重力加速度) として, 時間 t で Laplace 変換すると

$$Ms^2 \{L[\delta_0] + L[w_0]\} + L[P] = MV_0 \quad (10)$$

平底剛体における Hertz の弾性接触論による板の局部変形 δ_0 と衝撃力 $P(t)$ の関係は, 次式のように表わすことができる³⁾.

$$\delta_0 = \frac{1-\nu^2}{2Er_a} P(t) = KP(t) \quad (11)$$

ただし, $K = \frac{1-\nu^2}{2Er_a}$, E : 板の弾性係数, ν : ポアソン比

11) 式をラプラス変換し, 8) 式と共に 10) 式に代入すると

$$Ms^2 \left\{ KL[P(s)] + \frac{1}{\rho d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L[P(s)]}{N_{mn}^2(s^2 + \omega_{mn}^2)} \phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \phi_{mn}(x, y) \right\} + L[P(s)] = 0 \quad (12)$$

初期条件 $t=0$ で初速度 $V_0 = \sqrt{2gh}$ として, 12) 式を Laplace 逆変換すると, 剛体が矩形床版に落下した場合, Hertz の弾性接触論を考慮に入れた衝撃力を求めるには次式に示す積分方程式となる.

$$KP(t) + \frac{1}{\rho d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \phi_{mn}(x, y)}{N_{mn}^2 \omega_{mn}} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau = V_0 t \quad (13)$$

8) 式をラプラス逆変換するとたわみが求まる.

$$w(x, y, t) = \frac{1}{\rho d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \phi_{mn}(x, y)}{N_{mn}^2 \omega_{mn}} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

14) 式を 15) 式に代入して中立軸から z 離れた x 方向の曲げ歪を求めると,

$$\varepsilon_{zz} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$= -\frac{z}{\rho d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{a} \right]^2 \frac{\phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \phi_{mn}(x, y)}{N_{mn}^2 \omega_{mn}} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (15)'$$

x, y 方向の単位幅当たりのねじりモーメント M_{xy}, M_{yz} , x, y 方向の単位幅当たりの反力 V_x, V_y とすれば, 4 支点における全支点反力 V は次式のように示される.

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^b V_x \Big|_{x=a} dy + 2 \int_0^a V_y \Big|_{y=b} dx - 8M_{xy} \Big|_{x=a, y=b} \\ &= -\frac{4 \left[\frac{d}{a} \right]^2 \left[\frac{b}{a} \right]^2 \pi^2 D}{\rho d^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{m}{n} \left[m^2 + (2-\nu) \left[\frac{na}{b} \right]^2 \right] + \frac{n}{m} \left[\frac{a}{b} \right]^2 \left\{ (2-\nu) m^2 + \left[\frac{na}{b} \right]^2 \right\} \right\} \\ &\quad - 2(1-\nu) mn \left[\frac{a}{b} \right]^2 \frac{\phi_{mn}(\xi_0, \eta_0)}{N_{mn}^2 \omega_{mn}} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

また, 15), 16) 式では集中荷重のために Fourier 級数の収斂があまり良くないことから分布荷重幅 (u, v) とする分布荷重 $q(x, y, t)$ として載荷点中央 (ξ_0, η_0) に作用させると, 以下のように示される.

$$q(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{uv} = \frac{P(t)}{uv} \int_{\xi_0-u/2}^{\xi_0+u/2} \int_{\eta_0-v/2}^{\eta_0+v/2} \phi_{mn}(x, y) dx dy = \frac{4abP(t)}{mnuv\pi^2} \phi_{mn}(\xi_0, \eta_0) \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b} \quad (17)$$

3. 数値計算例

本論文では, 室蘭工業大学に行われた四辺単純支持された RC 床版の衝撃実験のデータに基づいてパラメータを設定した⁸⁾. 従って, 床版はスパン $a=b=1.25m$, 厚さ $d=0.1m$, 密度 $\rho=2.5t/m^3$, ポアソン比 $\nu=0.2$, 弾性定数 $E=2.785 \times 10^6 tf/m^3$ とし, 重錘は質量 $M=0.07t$, 半径 $r_a=0.075m$ として応答計算を行った. なお, 13) 式の Fredholm 型積分方程式を数値解析するには文献 2) を参考にし, simpson の積分則を用いて数値的に積分した. その時間刻みは $t=1 \times 10^{-1} \mu sec$ で, また Fourier

級数の m および n はいずれも 100 項目で収斂したのでこの項数で計算を行なった。

図-2 は、初速度 $V=1m/sec$ における重錘が床版に作用する衝撃力の時刻歴応答を示している。実線は矩形床版、破線は無限版を示している。なお、矩形床版の場合は、衝撃力が負となった時点で衝撃作用が終了したものと見なし計算を終了している。

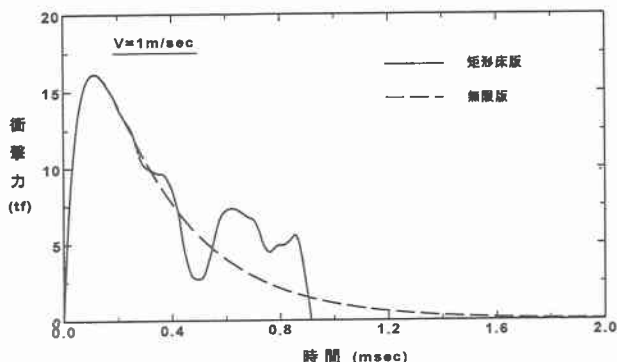


図-2 衝撃力の時刻歴応答

矩形床版における衝撃力の場合では、 $t=0.11msec$ で最大衝撃力 $P_{max}=16.13tf$ となり、その後、無限版の波

形上を振動しながら減少し、衝撃作用時間 $t_d=0.914msec$ で終了している。一方、無限版の場合では、最大値に達するまで矩形床版と近似した波形となり、その後は時間の増加と共に単調減少しながら零に漸近する過減衰振動を示していることがわかる。このことより、本論文の条件における無限版の場合は重錘の跳ね返り現象が生じないことがわかる。

以上のことより、無限版の場合では、最大衝撃力およびそれに達する時間に関して矩形床版の場合と一致しているが、衝撃作用時間に関しては有限版の場合と異なることがわかる。このことは、矩形床版の場合は重錘が上方へ跳ね返ることから、このような相違が生じたものと考えられる。

4. あとがき

本論文では、平底重錘が四辺単純支持された矩形床版の中央に落下した場合の床版の衝撃挙動を検討した。理論解析は、Hertz の弾性接触理論を考慮に入れた古典板理論を誘導し、衝撃力の時刻歴応答について無限版の場合と比較検討した。

その結果、矩形床版の場合は、最大衝撃力およびそれに達する時間に関して無限版の場合と一致することから、最大衝撃力を評価するような場合は矩形床版に比較して簡単な無限版を適用しても十分であることがわかった。

今後は、床版のたわみ、ひずみおよび重錘衝撃力と支点反力との関係についても検討する予定である。

参考文献

- 1) MINDLIN,R.D.1951.Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, ASME, 31~38.
- 2) 大沼博志：コンクリート構造物の高温クリープと衝撃応答特性に関する研究，北海道大学学位論文，1984.
- 3) 岩崎正二：衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析，岩手大学工学部研究報告，Vol.37, pp.127~138, 1984.
- 4) Reismann,H.: Elastic Plates-Theory and Application, Wiley, 1988.
- 5) Reismann,H.: Forced Motion of Elastic Plates, Transaction of ASME, pp.510~515, 1968.
- 6) Chandrasekaran,K.,Kunukkasseril,V.X.: Forced Axisymmetric Response of Circular Plates, Journal of Sound and Vibration, pp.407~417, 1976.
- 7) 芳村仁・三上隆・運上茂樹・若林学：ロックシェッドに作用する落石の衝撃力，土木学会北海道支部論文報告集，pp.103~108, 1985年.
- 8) 岸 徳光・松岡健一・大沼博志・能町純雄：四辺単純支持 RC 矩形板の重錘落下衝撃実験，構造工学論文集，Vol. 38A, pp.1587~1596, 1992.3.