

I-16 Timoshenko 梁に作用する横衝撃荷重の予測

北海道大学 学生員 柴田 俊文
 北海道大学 正 員 三上 隆
 ㈱地崎工業 正 員 須藤 敦史
 北海道大学 正 員 佐々木康彦

1. はじめに

構造部材の衝撃挙動に関する研究が盛んに行われている。衝撃応答の理論解析においては、外力として作用する荷重は簡単な形で仮定する場合が多いが、構造物の安定性の検討には衝撃力の正確な評価が重要である。これまでも正弦荷重を仮定して拡張カルマンフィルタを適用し、出力波形から衝撃力波形の同定を行ってきたが、より積極的な利用を計るにはまだ検討すべき問題は多い。ここではマルコフ連鎖の考えに基づく推定値の影響時間数を変化させ、様々な荷重を想定することによって比較検討を行った。

2. 拡張カルマンフィルタ

拡張カルマンフィルタは非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本に構成されている。

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t) + G_t W_t \quad (1)$$

$$Y_{t_k} = h(X_{t_k}, t_k) + V_{t_k} \quad (2)$$

X_t : 状態ベクトル Y_{t_k} : 観測ベクトル G_t : 変換マトリックス

W_t : システム雑音ベクトル V_{t_k} : 観測雑音ベクトル

ここで雑音ベクトルは正規性のホワイトノイズである。

$$E[W_{t_k}] = 0, \quad E[W_{t_k} W_{t_k}^T] = Q_{t_k} \delta_{t_k} \quad (3)$$

$$E[V_{t_k}] = 0, \quad E[V_{t_k} V_{t_k}^T] = R_{t_k} \delta_{t_k} \quad (4)$$

δ_{t_k} : クロネッカデルタ

上式を規準軌跡のまわりで Talor 展開して線形化し、カルマンフィルタの式に代入したものが以下の拡張カルマンフィルタのアルゴリズムになる。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{X}(t|t_k), t) dt \quad (5)$$

$$P(t_{k+1}|t_k) = \Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] P(t_k|t_k) \Phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] + \Gamma(t_k) Q(t_{k+1}) \Gamma^T(t_k) \quad (6)$$

$$K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} = P(t_{k+1}|t_k) M^T \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \\ \times [M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} P(t_{k+1}|t_k) M^T \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} + R(t_{k+1})]^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] [Y_{t_{k+1}} - h\{\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}\}] \quad (8)$$

Study on a Prediction of Lateral Impact Load on Timoshenko Beam

by Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI, Atsushi STOHI and Yasuhiko SASAKI

$$\begin{aligned}
P(t_{k+1}|t_{k+1}) = & \left[I - K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \right] P(t_k|t_k) \\
& \times \left[I - K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \right]^T \\
& + K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} R(t_{k+1}) K^T\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\}
\end{aligned} \quad (9)$$

$\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$: Y_{t_k} が得られたときの t_{k+1} 時間における推定状態ベクトル

$P(t_k|t_k)$: 推定誤差の共分散マトリックス

$\Gamma(t_k)$: 既知マトリックス

$Q(t_k)$: システム雑音の共分散マトリックス

$K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\}$: 時刻 t_{k+1} でのカルマンゲイン

$R(t_{k+1})$: 観測雑音の共分散マトリックス

I : 単位マトリックス

また変換マトリックスは

$$\Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = I + \Delta G[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \quad (10)$$

$$G[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = \left[\frac{\partial f(X_i, t)}{\partial X_j} \right]_{X_i = \hat{X}(t_k|t_k)} \quad (11)$$

Δ : 時間きざみ

である。

衝撃荷重同定の場合、同定パラメーターを要素とする状態量が定常性を示すものと仮定する。ここで同定する衝撃荷重を時間方向にとり、推定状態ベクトルとした。従ってこの場合、状態方程式を離散表示すると次式となる。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = [I] \hat{X}(t_k|t_k) + W_t \quad (12)$$

状態方程式を定常と仮定したため、観測方程式より変換マトリックスを作成する。

変換マトリックスは

$$M\{t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1})\} = \left[\frac{\partial h(X_j, t_k, t_k)}{\partial X_j} \right]_{X_{t_k} = \hat{X}(t_k|t_{k-1})} \quad (13)$$

となり、上式は有限要素法を各状態量で偏微分する影響係数法で近似的に求めることができる。

$$\frac{\partial h_i(X_{j_{t_k}})}{\partial X_j} = \frac{h_i(X_{j_{t_k}} + \Delta X_j e_j) - h_i(X_{j_{t_k}})}{\Delta X_j} \quad (14)$$

ΔX_j : X_j の微小増分

e_j : j 番目の要素が 1 の単位ベクトル

3. マルコフ過程

確率過程 $X(t, \omega)$ の時間パラメーター t の取りうる領域、つまりパラメーター空間 T が連続的であり、 $X(t, \omega)$ の取りうる領域、つまり状態空間 S が離散的であるような場合を考える。そして、「現在の状態がわかれば、過去とは無関係に未来の確率がわかる」というマルコフ性をもつとき $X(t, \omega)$ を連続時点のマルコフ連鎖という。ここでマルコフ性を式で表すと、

$$\begin{aligned}
& P\{X(t, \omega) \leq x | X(t_1, \omega) = x_1, X(t_2, \omega) = x_2, \dots, X(t_n, \omega) = x_n\} \\
& = P\{X(t, \omega) \leq x | X(t_n, \omega) = x_n\}
\end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで $n > 0$ 、 $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ である。また m 時間前までの値の影響がある場合、すなわち

$$\begin{aligned} & P\{X(t, \omega) \leq x | X(t_1, \omega) = x_1, X(t_2, \omega) = x_2, \dots, X(t_n, \omega) = x_n\} \\ &= P\{X(t, \omega) \leq x | X(t_n, \omega) = x_n, X(t_{n-1}, \omega) = x_{n-1}, \dots, X(t_{n-m}, \omega) = x_{n-m}\} \end{aligned} \quad (16)$$

である場合を m 重のマコフ連鎖という。

この考え方を拡張カルマンフィルタの変換マトリックスに用いる。

変換マトリックス M を $M\{t_k; \hat{X}(t_k | t_{k-1})\} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ とする。 $t = k$ で m 時間前までの値の影響を受けるとすると上式の変換マトリックスは、

$$M\{t_k; \hat{X}(t_k | t_{k-1})\} = \{0, \dots, 0, M_{k-m}, \dots, M_k, 0, \dots, 0\} \quad (17)$$

となる。

以上より拡張カルマンフィルタと有限要素法を用いた荷重の同定が可能となる。

4. 数値解析

衝撃荷重に正弦荷重、二種類の三角形荷重の計三種類の荷重を想定し、両端単純支持した梁の中央に作用するものとした。剛性マトリックス、質量マトリックスは Timoshenko 梁の理論によるものを用い、対称性より梁の半分を 20 要素に分割して解析を行った。梁の供試体諸元は表 1 の通りである。

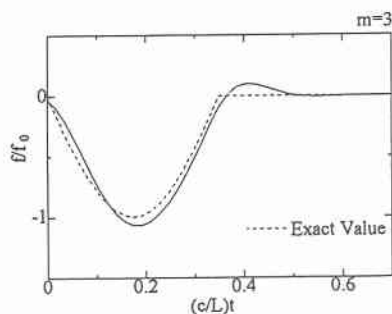
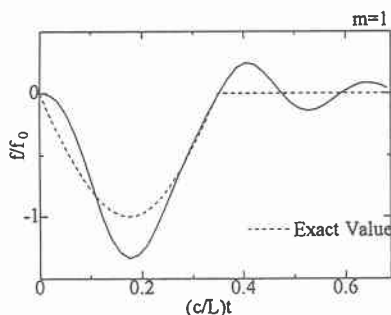
表 1 供試体諸元

梁の長さ(L)	100.0(cm)	密度(ρ)	$2.446 \times 10^{-6}(\text{kgfsec/cm}^4)$
梁の幅(b)	7.8(cm)	ポアソン比(ν)	0.2
梁の高さ(h)	15.0(cm)	弾性係数(E)	$3.0 \times 10^5(\text{kgf/cm}^2)$

時間積分法は Newmark- β 法を用い、時間刻み Δt は $(c/L) \Delta t = 0.0175$ を用いた。ここで c は縦波の速度を表す。

拡張カルマンフィルタの先験情報は収束性のよい $P=10$ 、 $R=1.0 \times 10^{-6}$ を用い、変位に 10 を乗じた値を同定パラメータとした。縦軸を荷重、横軸を時間とし、モード解析より求めた厳密解を点線で表した。

正弦荷重を用い、推定値の影響を受ける時間数を変化させた結果を図 1 に示す。



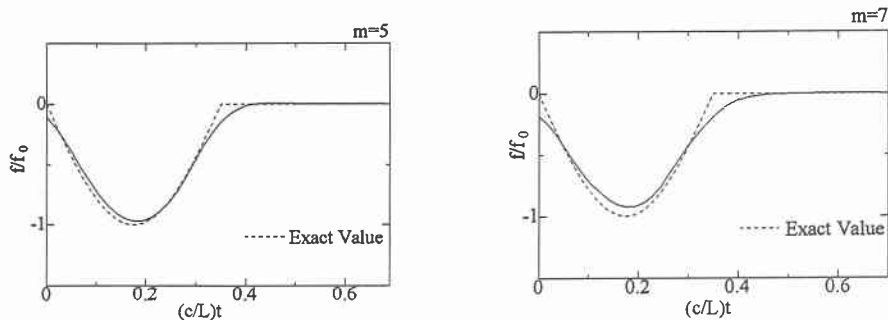


図1 正弦荷重での同定結果

影響時間数を増加させていくにしたがって収束性が向上しているのがわかる。しかし影響時間数が7になると逆に収束性は低下し、特に時刻 $(c/L)t=0$ での同定値の悪化が顕著である。

次に荷重の形を変化させた結果をそれぞれ図2、3に示す。

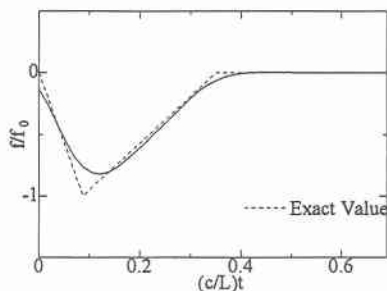


図2 三角形荷重(1)での同定結果

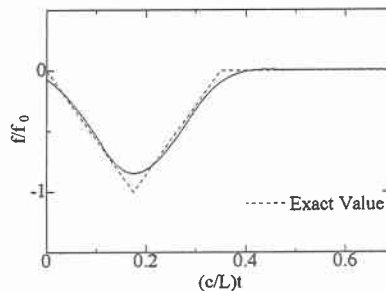


図3 三角形荷重(2)での同定結果

三角形荷重(1)、(2)とも前結果で収束性の良かった影響時間数5を用いた。結果を検討するといずれも良い収束性を示しているのがわかる。しかし荷重の頂点部では良好な同定値を確認することはできなかった。

5. 考察

影響時間数を5より増加させると時間 $(c/L)t=0$ の付近での同定値の収束性が悪化している。影響時間数を n とすると n ステップ前までの時間の値を用いて同定しているため同定時刻での収束性は良くなるが、その一方で n ステップ前の同定値は現時間までの n 個のデータを用いて平滑化しているため収束性が低下していると考えられる。また三角形荷重の場合頂点部で同定値と厳密解との差が認められるが、前述した理由によるものと考えられる。

6. まとめ

- ① 影響時間数は5で最も収束性に優れ、増加及び減少させると収束性は低下した。
- ② 衝撃荷重を三角形と仮定した場合三角形頂点部ではやや収束性は悪化したが生正弦荷重同様よい収束性が認められた。