

II-72

結氷下の鉛直流速分布についての一考察

開発土木研究所 正員 山下彰司
 北開水工コンサルタント 正員 福田正一
 石狩川開発建設部 石田享平

1. はじめに

冬期に北海道の河川の大部分は結氷し、氷板が水面を覆う。このため氷板下面に新たな摩擦抵抗が生じ、氷板下の水理状況は夏期とは大きく異なり、鉛直方向の流速分布も夏期とは異なる。

流速分布の変化は流量を算定するときに用いる鉛直方向平均流速の推定精度に影響を及ぼす。従来、氷板下の流速分布のモデルとしては $k-\epsilon$ モデルが用いられることが多かったが、Tsai¹⁾, Teal²⁾等は新たに Two-Power Law を提案し、氷板下の流速分布を表現した。Two-Power Law は開水路での指数則 ($u = u_{max}(z/D)^{1/m}$) と同様に河床面および氷板下面の境界近傍で不合理な問題を含んでいるが、適当な係数 m を与えてやれば結氷下の流速分布を非常によく表現することができる。しかし、係数 m と河床面及び氷板下面の摩擦係数 f との関係はあまり明らかでない。

本報文では実測の氷板下の流速分布を用いて、河床面と氷板下面の摩擦係数を Majewski の方法³⁾で算出し、Two-Power Law での係数 m と摩擦係数 f の関係を明らかにし、氷板下の流速分布の推定を行う。また、Two-Power Law を用いて最適な平均流速推定法の検証を行う。

2. 実測値を用いた平均流速推定法の比較

Table.1⁴⁾は平成4年から平成6年にかけて天塩川と石狩川で行った詳細な流速分布観測データを用いて、5つの平均流速推定法の比較をおこなったものである。

Table.1 Comparison of estimation methods of vertical average velocity

Method	Coefficient α	Sum of Deviation of U_{cal}	Average Deviation around U_{real}
0.2D&0.8D	0.95	0.024	0.0015
0.4D	0.94	0.042	0.0030
0.5D	0.91	0.040	0.0044
0.6D	0.89	0.045	0.0063
0.4D&0.8D	0.91	0.042	0.0050

Table.1において平均流速推定法(method)は以下の定義である。

$$\begin{aligned}
 &0.2D\&0.8D \text{ method } \bar{v} = (v_{0.2D} + v_{0.8D})/2 \\
 &0.4D \text{ method } \bar{v} = v_{0.4D} \times 0.86 \\
 &0.5D \text{ method } \bar{v} = v_{0.5D} \times 0.88 \\
 &0.6D \text{ method } \bar{v} = v_{0.6D} \times 0.92 \\
 &0.4D\&0.8D \text{ method } \bar{v} = 0.32 \times v_{0.4D} + 0.68 \times v_{0.8D}
 \end{aligned}$$

ここで、 v_{*D} は*割水深での流速を意味する。また、 $U_{real} = \alpha U_{cal}$ である。

Table.1に見られるように各方法(method)とも係数 α は1を下回り、過大に平均流速を評価する傾向がある。その中で従来の平均流速推定法である 0.2D&0.8D method は係数 α の値が最も1に近くて真値に近く、データのばらつき(Sum of Deviation of U_{cal})も少ない。

水深の浅いところでは流速測点を2点とることが難しいので流速測点1点のデータで平均流速を推定する方法(1点法)が用いられる。現在、水深の浅い地点で結氷下の平均流速は夏期と同様に6割水深($v_{0.6D}$)で代表している。しかし、Table.1の0.6D method からわかるように6割水深に係数0.92を乗じてもお平均流速は10%程度過大に見積もられている。したがって、実際は15~20%程度過大に見積もられていることになる。

A Study of Vertical Average Velocity in Ice-covered River by Shoji YAMASHITA, Shoichi FUKUDA and Kyohei ISHIDA

Table.1で流速測点1点のデータで平均流速を推定する0.4D, 0.5D, 0.6D methodでは0.4D methodが真値周りの平均誤差(Average Deviation around U_{real})が小さく真値に近かった。

以上より実測値を用いた統計的解析からすると従来の0.2D&0.8D methodは計測手法の誤差等を考慮すると結水下の流れの平均流速推定でも妥当であること、また、水深が浅いところで流速測点1点のみで平均流速を推定せざるおえないところでは0.4D methodが3つの方法の中で最も最適であることが示唆された。

3. Two-Power Lawによる平均流速推定法の比較

3.1 Two-Power Law の概念

Tsai等が提案したTwo-Power Lawは以下の式である。

$$u = K_a(z/D)^{1/m_b}(1-z/D)^{1/m_c} \quad (1)$$

ここで、 z :河床からの距離, D :水深, m_b :河床の摩擦係数に関わる係数, m_c :氷板下面の摩擦係数に関わる係数である。

摩擦係数が小さくなると係数 m は大きくなる。また、係数 m_c が ∞ になると $1/m_c \Rightarrow 0$ となり、開水路での指数則となる。

流速が最大流速 u_{max} となる地点 z を D_{max} とし、せん断力 τ が0となる地点と一致するとする($\partial u/\partial z = 0$ at $z = D_{max}$)と以下の通りとなる。

$$\frac{D_{max}}{D} = \frac{m_c}{m_b + m_c} \quad (2)$$

平均流速は以下の通りとなる。

$$U = K_a K_1 \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{\Gamma(1+1/m_b)\Gamma(1+1/m_c)}{\Gamma(2+1/m_b+1/m_c)} \quad (4)$$

また、結水下の流れを最大流速の発生する $z = D_{max}$ 面で区切り、河床面寄り河床影響域とし、氷板寄りを氷板影響域として、Two-Power Lawを積分してそれぞれの影響域の平均流速を求めると以下の通りとなる。

$$U_b = K_a K_2 \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{1}{D_{max}} \int_0^{D_{max}} K_a \left(\frac{z}{D}\right)^{1/m_b} (1-\frac{z}{D})^{1/m_c} dz \quad (6)$$

$$= \left(\frac{D_{max}}{D}\right)^{1/m_b} K_a \frac{m_b}{1+m_b} {}_2F_1(1+1/m_b, -1/m_c, 2+1/m_b, m_c/(m_b+m_c)) \quad (7)$$

$$U_c = K_a K_3 \quad (8)$$

$$K_3 = \frac{m_b+m_c}{m_b} \left(K_1 - \frac{m_c}{m_b+m_c} K_2\right) \quad (9)$$

ここで、 ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ はGAUSSの超幾何関数である。

一方、開水路での指数則の係数 m と摩擦係数 f とは以下の関係がある。

$$\frac{u_{max}}{U} = \frac{m+1}{m} = \frac{\sqrt{8/f}+1/\kappa}{\sqrt{8/f}} \quad (10)$$

$$m = \kappa \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (11)$$

上の関係をTwo-Power Lawにおいて最大流速発生水深を境に河床の影響域と氷板の影響域に分けてそれぞれに適用すると以下の通りとなる。ここで U_b は河床影響域の平均流速である。

$$\frac{u_{max}}{U_b} = \frac{1 + m_b}{m_b} \frac{(m_b/(m_b + m_c))^{1/m_c}}{{}_2F_1(1 + 1/m_b, -1/m_c, 2 + 1/m_b, m_c/(m_b + m_c))} \quad (12)$$

ここで、定数 Cmb を以下のようにする。

$$Cmb = \frac{(m_b/(m_b + m_c))^{1/m_c}}{{}_2F_1(1 + 1/m_b, -1/m_c, 2 + 1/m_b, m_c/(m_b + m_c))} \quad (13)$$

したがって、

$$\frac{1 + m_b}{m_b} Cmb = \frac{\sqrt{8/f_b} + 1/\kappa}{\sqrt{8/f_b}} \quad (14)$$

$$m_b = \frac{Cmb \sqrt{8/f_b}}{\sqrt{8/f_b} - Cmb \sqrt{8/f_b} + 1/\kappa} \quad (15)$$

同様に氷板域では以下の通りとなる。

$$m_c = \frac{Cmc \sqrt{8/f_c}}{\sqrt{8/f_c} - Cmc \sqrt{8/f_c} + 1/\kappa} \quad (16)$$

$$Cmc = \frac{(m_c/(m_b + m_c))^{1/m_b}}{{}_2F_1(1 + 1/m_c, -1/m_b, 2 + 1/m_c, m_b/(m_b + m_c))} \quad (17)$$

Cmb 及び Cmc は共に m_b 及び m_c の関数になり、それは Fig-2,3 の様になる。

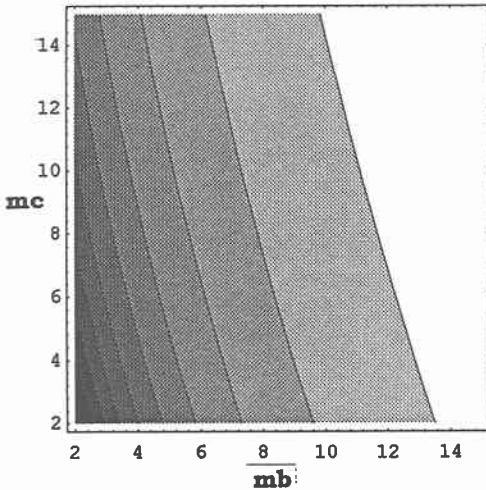


Fig. 1 Configuration of $Cmb(m_b, m_c)$

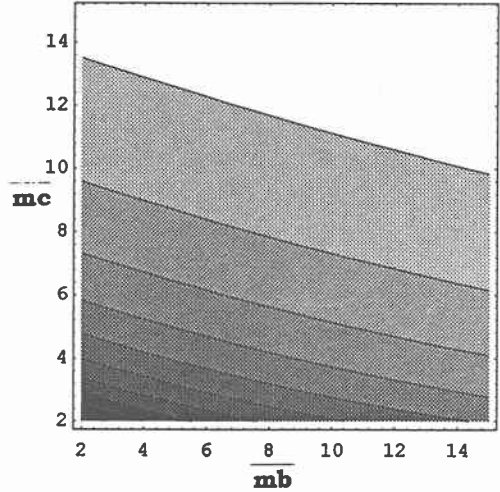


Fig. 2 Configuration of $Cmc(m_b, m_c)$

3.2 実測値との比較

Fig.4, 5, 6 はそれぞれ実測の流速分布測定の結果と *Two-Power Law* を用いた流速分布の推定線を描いたものである。

図中で f_b, f_c はそれぞれ *Majewski* の方法を用いて算定した河床面と氷板下面の摩擦係数であり、 Ka, MB, MC はそれぞれ流れ固有の *Two-Power Law* での係数である。また、破線は開水路での摩擦係数 f と係数 m の関係式 (11) を用いたもの、実線は *Two-Power Law* に適合するように係数 Cmb, Cmc を導入した関係式 (13), (17) を用いて修正した係数 m_b, m_c を用いて描いた図である。

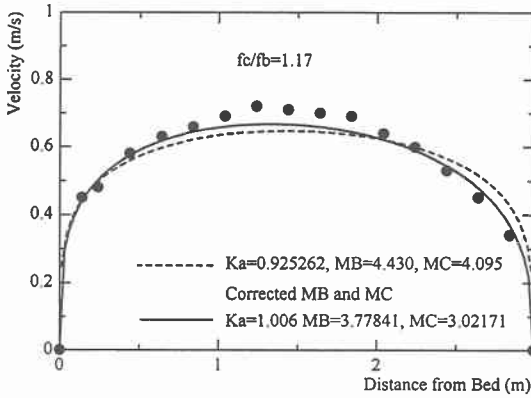


Fig.3 Velocity Profile $f_c/f_b = 1.17$

氷板と河床面の摩擦係数の比が1.0に近くほぼ対称な流れのFig.3では m_b, m_c の修正前も修正後も推定曲線はほぼ実測値に適合している。しかし、Fig. 4, 5の様に河床面と氷板下面の摩擦抵抗の差が大きい非対称性の強い流れでは修正前の m_b, m_c を用いた推定曲線よりは修正後の推定曲線の方が実測値により適合している。しかし、修正後の推定曲線も最大流速が発生する面が摩擦抵抗の小さい方に偏っている。この原因は、セン断力 $\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ となる箇所を最大流速が発生する箇所としたため、Hanjalic and Launder⁵⁾が粗度の著しく異なる2枚の平板で行った非対称流れの風洞実験で明らかにしたセン断力 $(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z}) = 0$ となる箇所が最大流速発生部 $u = u_{max}$ となる箇所より摩擦抵抗が小さい方に偏っている現象を考慮していないからであると思われる。この点は今後の課題である。

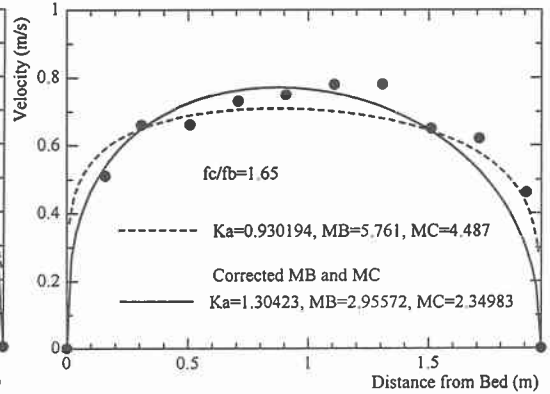


Fig.4 Velocity Profile $f_c/f_b = 1.65$

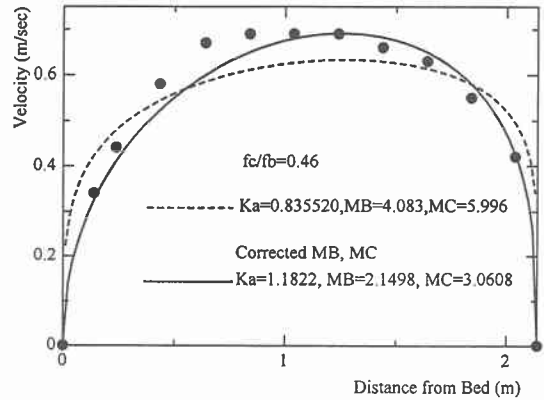


Fig. 5 Velocity Profile $f_c/f_b = 0.46$

3.3 平均流速推定法の精度

Two-Power Lawを用いて1節で検討した5種類の平均流速推定の方法について流速分布から算出した平均流速との相対誤差 (Velocity Bias) を比較した。相対誤差の定義は以下の式の通りである。

相対誤差 (Velocity Bias) は以下の式で算出した。

$$\epsilon = \frac{\hat{U} - \bar{U}}{\bar{U}} \quad (18)$$

\hat{U} は各平均流速推定法から算出した値、 \bar{U} は流速分布を積分して求めた真の平均流速値である。

Fig.6~10に各平均流速推定法の相対誤差のコンター図を示す。すべてのFig. 中で f_c : 氷板下面の摩擦係数、 f_b : 河床面の摩擦係数である。また、Fig.11には平成4年から平成6年にかけて調査した実測データでの氷板下面の摩擦係数 f_c と河床面の摩擦係数 f_b のヒストグラムである。

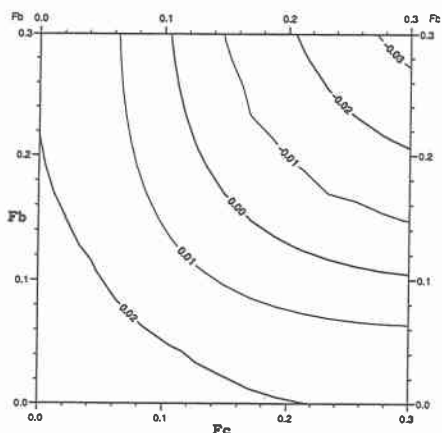


Fig.6 Velocity Bias
for 0.2D & 0.8D method

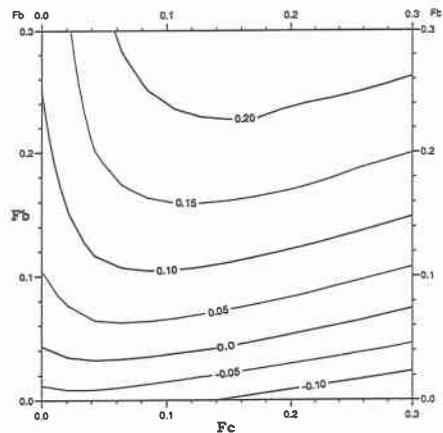


Fig.7 Velocity Bias
for 0.4D method

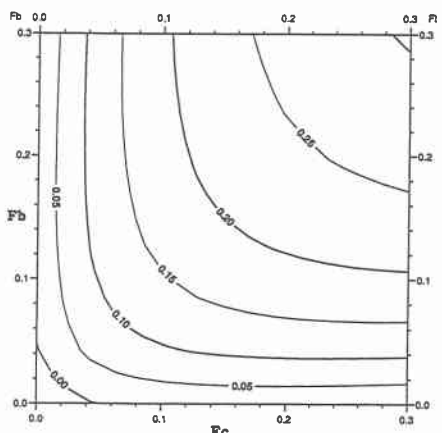


Fig.8 Velocity Bias
for 0.5D method

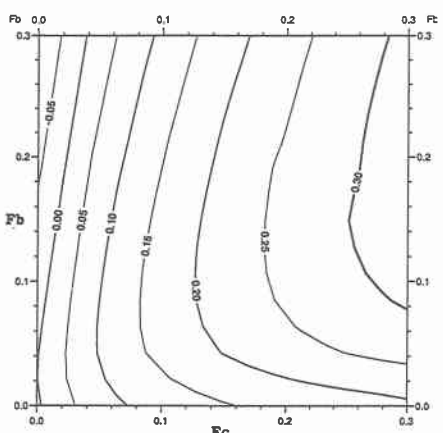


Fig.9 Velocity Bias
for 0.6D method

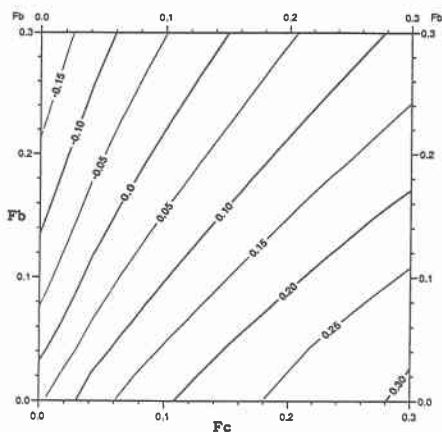


Fig.10 Velocity Bias
for 0.4D & 0.8D method

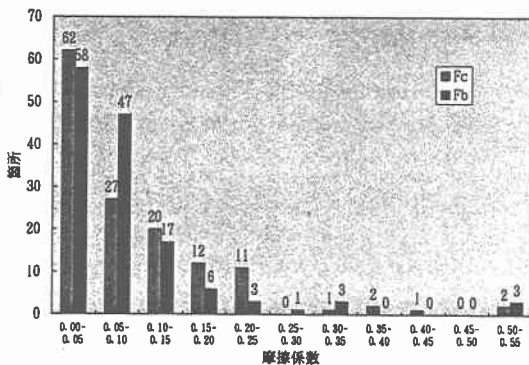


Fig.11 Friction Coefficient histogram

Fig. 6 ~ 10を比較すると *0.2D* & *0.8D method*が最も相対誤差(0.02 ~ -0.03)が小さかった。相対誤差の変化傾向は氷板下面の摩擦係数及び河床面の摩擦抵抗両者の影響を受けており、摩擦係数が大きくなるにしたがって推定値が過小に評価される傾向にあった。Fig.8に示すように *0.5D method*は *0.2D* & *0.8D method*と同様に氷板下面と河床面両方の影響を受けているが、相対誤差そのもの(0.00 ~ 0.30)は大きく、摩擦係数が大きくなるにつれて推定値は過大に評価される傾向にある。Fig.7に示されるように *0.4D method*は氷板下面よりは河床面の摩擦抵抗の影響を強く受ける傾向があり河床面の摩擦係数が大きくなるにつれて過大に評価される傾向にある。Fig.9に示されるように *0.6D method*は *0.4D method*と逆に河床面よりは氷板下面の摩擦抵抗の影響を強く受ける傾向にあり、摩擦係数が大きくなるにつれて推定値は過大に評価される傾向にある。*0.4D* & *0.8D method*は *0.2D* & *0.8D method*及び *0.5D method*と同様に氷板下面及び河床面の摩擦抵抗の影響を受けるが、氷板下面の摩擦係数が大きくなり、河床面の摩擦係数が小さくなるほど推定値は過大に評価される傾向にある。Fig.11は河床面と氷板下面の実測の摩擦係数データのヒストグラムである。両摩擦係数のデータとも0.00 ~ 0.30の間に大部分が集中している。しかし、河床面の摩擦係数データは0.00 ~ 0.10に76%程度が集中している。また、氷板下面の摩擦係数データは0.00 ~ 0.05に45%程度集中しているが他のデータは0.05 ~ 0.25の間に分散している。

一般に水深の浅いところでは流速測点1点で流速データから平均流速を推定する1点法が用いられる。三つの1点法を比較するとどの推定法も相対誤差の変動の大きさは0.30程度であるが、Fig.11より氷板下面の摩擦係数の分散が河床面の摩擦係数と比較して大きいことと、両摩擦係数の分布が0.00 ~ 0.10に集中していることを考えると *0.4D method*が氷板下面の摩擦抵抗に影響を受けづらく、また両摩擦係数が0.00 ~ 0.10の範囲で相対誤差が±0.05内程度と安定していることから1点法の中で最も安定した推定法であると思われる。

4. おわりに

本研究では *Two-Power Law*を用いて鉛直流速分布の推定を行うと共に平均流速推定法の妥当性を検証してみた。結論として、セン断力が0となる水深で最大流速が発生すると仮定したことから、最大流速発生水深が実測値と推定値で若干異なっていたが、ほぼ再現できていた。実測データを統計的に整理して平均流速推定法を比較した結果としては *0.2D* & *0.8D method*が最も安定しており、1点法の中では *0.4D method*が最も真値に近く安定していた。*Two-Power Law*を用いて平均流速を比較した結果でも *0.2D* & *0.8D method*は他の方法と比較して1オーダー精度が高かった。1点法では三つとも相対誤差の変動範囲は0.30程度と同じであったが、氷板下面の摩擦係数が河床面の摩擦係数より若干分散していることより、*0.4D method*が氷板下面の摩擦抵抗の影響を受けにくく、また相対誤差の変動範囲も±0.05程度と安定しているので最も妥当であると思われる。

今後の課題としては推定した最大流速発生水深と実測値を一致させることにより、推定流速分布を実測値と一致させることがあげられる。

参考文献

- 1) Whey-Fone Tsai and Robert Ettema; *Modified Eddy Viscosity Model Fully Developed Asymmetric Channel Flows*, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, No.4, pp720-732, 1994.
- 2) Martin J. Teal and Robert Ettema; *Estimation of Mean Flow Velocity in Ice-Covered Channels*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No.12, pp1385-1400, 1994.
- 3) Wojciech Majewski, Maria Baginska and Pawet Walczak; *Determination of Roughness Coefficient of the underside of Ice Cover*, *IAHR Ice Symposium 1988 Sapporo*, pp122-130, 1988.
- 4) 山下彰司, 福田正一, 石田享平; 寒冷地河川における平均流速推定手法について, 寒地技術論文・報告集 Vol. 11, pp164-169, 1995.
- 5) K. Hanjalic and B. E. Launder; *Fully developed asymmetric flow in a plane channel*, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 51, part 2, pp301-335, 1972.