

II-66

グリーン関数を用いたフレキシブルシート回りの波動場解析

北海道東海大学工学部 学生員 先川 信  
 北海道東海大学工学部 比奈地 茂之  
 北海道東海大学工学部 正 員 浜中 建一郎

1. はじめに

小形船舶の航行を妨げない波浪制御構造物として没水平板やフレキシブルシート等が提案されている。そのうち後者は没水深が比較的深くても効果が期待できることが加藤・浜中(1994)により報告されている。加藤・浜中(1994)は断面2次元の場合の解析方法も提案しているが、その方法は基本的にはポテンシャル接続法である。すなわち、領域をいくつかの単純な形の領域に分け、各々に級数展開されたポテンシャルを仮定し、領域の接する境界上でポテンシャルとその法線微分が連続であるとして解く。しかしながら、この方法を3次元波動場に拡張しようとする、波動場を適切に表現するのに必要なポテンシャルの級数項数は非常に多くなる。

本研究では、新しい解析方法として、波動に対する Green 関数を用いて解く方法を提案する。

一様水深波動場に対する Green 関数としては John(1950)のもの、収束性を改良した Orihashi・Hamanaka(1994)の修正 Green 関数とがあるが、フレキシブルシートの解析の場合、特異点を含む鉛直面上の積分がないから、どちらの Green 関数でも良い。

又、シートの変位とシート上下面での圧力差に対し適当な関数形を仮定したことにより、断面2次元でも3次元でも必要な未知数はシート1枚に対し1個となり、ポテンシャル接続法に比べ圧倒的に有利な解析方法となった。

2. 基礎方程式と Green の積分方程式

有次元の速度ポテンシャルに時間的に周期的な関数を仮定して、

$$\hat{\Phi} = \text{Re}\{\hat{\phi}e^{-i\omega t}\}$$

ただし、 $\omega$  : 角周波数、 $t$  : 時間、 $\wedge$  : 有次元量  
 角周波数  $\omega$  と重力加速度  $g$  とでそれぞれ無次元化する。

$$(x, z) = (\hat{x}, \hat{z})\omega^2/g \quad (h, d, B) = (\hat{h}, \hat{d}, \hat{B})\omega^2/g$$

$$t = \omega t \quad \phi = \hat{\phi}\omega^3/g^2$$

従って、 $\Phi = \phi e^{-i\omega t}$  となる。

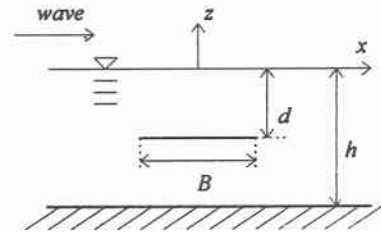


図1 座標系

基礎方程式と水面、水底での境界条件は  
 $\Delta\phi = 0$

$$\partial\phi/\partial z = \phi \quad \text{on } z=0$$

$$\partial\phi/\partial z = 0 \quad \text{on } z=-h$$

シートの変位を  $\zeta$  として、以下のように仮定する。

$$\zeta = \alpha \cos \beta x e^{-\mu} \quad \beta = \pi/B$$

今、考えている領域内の任意の位置 P 点のポテンシャルは断面2次元の Green 関数 G を用いると、

$$-\phi(P) = \int_S (\phi \partial G / \partial \nu - G \partial \phi / \partial \nu) dS \quad (2.1)$$

ここで Green 関数は

$$G = C_0 e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z_0 + h) \cosh k(z + h)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z_0 + h) \cos k_n(z + h) \quad (2.2)$$

An analysis of waves around submerged sheets by use of Green function  
 by Makoto Sakikawa, Shigeyuki Hinachi and Kenichiro Hamanaka

$$\begin{aligned} C_0 &= i/k(h + \sinh^2 kh) \\ C_n &= 1/k_n(h - \sin^2 k_n h) \end{aligned}$$

この Green 関数は水面と底面の境界条件を満たすから、(2.1)式の積分範囲  $S$  はシートの上下面  $S_1, S_2$  と、遠方境界  $S_f$  で良い。

$$S = S_1 + S_2 + S_f$$

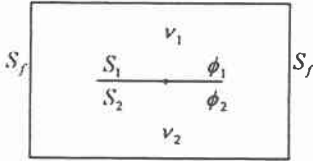


図2 境界

従って、

$$\begin{aligned} -\phi(P) &= \int_{S_1+S_2} (\phi \alpha G / \partial v - G \partial \phi / \partial v) dS \\ &+ \int_{S_f} (\phi \alpha G / \partial v - G \partial \phi / \partial v) dS \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。(2.3)式の右辺の第2項目は、P点での入射波ポテンシャル  $\phi_1(P)$  となり

$$-\phi(P) = \int_{S_1+S_2} (\phi \alpha G / \partial v - G \partial \phi / \partial v) dS - \phi_1(P) \quad (2.4)$$

次にシートの上下面では以下の事が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \alpha G / \partial v_1 &= -\alpha G / \partial v_2 \\ \partial \phi_1 / \partial v_1 &= -\partial \phi_2 / \partial v_2 \\ G|_{S_1} &= G|_{S_2} \end{aligned} \right\}$$

このことにより、(2.4)式は

$$-\phi(P) = \int_{S_2} (\phi_2 - \phi_1) \alpha G / \partial v_2 dS - \phi_1(P) \quad (2.5)$$

(2.5)式より、問題はシートの上下面でのポテンシャルの差が求まればよいことに帰着する。

### 3. 圧力方程式とシートの張力

任意点での圧力は圧力方程式を線形化して

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{\hat{p}}{\rho} + g \hat{z} = 0$$

両辺に  $\omega^2/g^2$  を掛けて無次元化すると、

$$p = -i\omega \partial \Phi / \partial t \quad (3.1)$$

ただし 
$$p = \frac{\omega^2}{\rho g^2} \hat{p}$$

次に、シートの上下面での圧力差は、(3.1)式より

$$\begin{aligned} \Delta P &= p_1 - p_2 = -\alpha \Phi_1 / a + \alpha \Phi_2 / a \\ &= i(\phi_1 - \phi_2) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

次に、シートの初期張力  $T$  が十分に大きく、シートの変位は微小とすると、シートの張力による鉛直力は、

$$F_z = T \partial^2 \zeta / \partial x^2 = -T a \beta^2 \cos \beta x e^{-i\omega t} \quad (3.3)$$

と書ける。

(3.2)式と(3.3)式より

$$\phi_1 - \phi_2 = i T a \beta^2 \cos \beta x \quad (3.4)$$

以上より、(3.4)式の  $\alpha$  が決定すれば、(2.4)式より任意の位置でのポテンシャルが求まることになる。

### 4. シートの振動振幅

次に  $\alpha$  を求めることを考える。今 P 点の座標を  $(x_0, z_0)$  として、(2.4)式の両辺を  $z_0$  で微分する。P 点の座標に関するものは  $\phi(P), \phi_1(P), G$  だけだから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} &= \int_{S_2} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial z_0} ds \\ &+ \frac{\partial \phi_1(P)}{\partial z_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

次に、P 点をシートの上下面の中央点 Q に近づける。

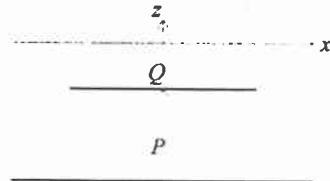


図3 特異点

$\partial \Phi(P) / \partial z_0$  は  $P \rightarrow Q$  では Q 点での Z 方向の流速すなわちシートの変位速度を表すから

$$\frac{\partial \Phi(P)}{\partial z_0} = \frac{\partial \hat{\Phi}(P)}{\partial z_0} e^{-i\omega t} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -i a \alpha e^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

$$\partial \phi(P) / \partial z_0 = -i a \quad (4.3)$$

(3.4)式と(4.3)式を(4.1)に代入して  $\partial / \partial v_2 = \partial / \partial z$  を考慮すると

$$-i\alpha = iT\alpha\beta^2 \int_{S_2} \cos \beta x \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} + \frac{\partial \phi_1(P)}{\partial z_0} \quad (4.4)$$

(4.4)式で未知数は $\alpha$ だけだから、右辺の積分が実行できれば解は定まることになる。

### 5. シート上の積分

Green 関数の特異性を考慮して特異点近傍の主値積分と、それ以外の積分に分けて考える。

#### 5. 1 特異点近傍での主値積分

Q点をP点が近づく点としてシート上の $2\Delta b$ の領域について考える。

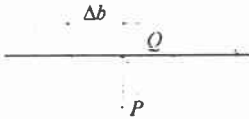


図4 特異点近傍のセグメント

今、 $\Delta b$ を十分に小さいものと考えれば、その間では $\cos \beta = 1$  (一定) とできるから、

$$I_1 = \int_{-\Delta b}^{\Delta b} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} dx$$

を求めればよいことになる。

(2.2)式の Green 関数の実部は、特異点の近傍では2次元の主要解に近づくので、

$$G \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \log r \quad (\text{on } r \rightarrow 0)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

これより

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z_0 \partial z} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} - 2 \frac{(z-z_0)^2}{r^4} \right\}$$

従って

$$I_1 = \int_{-\Delta b}^{\Delta b} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} dx = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\Delta b} \quad (5.1)$$

虚部は特異性を持たないから通常の積分で良い。

#### 5. 2 特異点近傍以外の積分

特異点近傍以外では通常の積分で考えて、

$$I_2 = \int_{\Delta b}^{B/2} \cos \beta x e^{-k_n x} dx \quad (5.2)$$

$$I_n = \int_{\Delta b}^{B/2} \cos \beta x e^{-k_n x} dx \quad (5.3)$$

を解析的に求めておくと、(4.3)式は

$$\begin{aligned} -i\alpha = iT\alpha\beta \{ & I_1 \\ & + 2k^2 C_0 (I_2 + \Delta b) \sinh k(z_0 + h) \sinh k(z + h) \\ & + 2 \sum_n k_n C_n I_n \sin k_n(z_0 + h) \sin k_n(z + h) \} \\ & + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_0} \\ = iT\alpha\beta I & + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

よって、求めるべき未知数 $\alpha$ は

$$\alpha = i \frac{\partial \phi_1(P) \cdot \partial z_0}{1 + T\beta^2 I} \quad (5.5)$$

シートが複数枚ある時はそれぞれの振幅を未知数にして連立させて解けば良い。

### 6. 水面でのポテンシャル

水面でのポテンシャルは、 $z_0 = 0$ として

$$\phi(P) = \int_{S_2} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial G}{\partial v_2} ds + \phi_1(P) \quad (6.1)$$

を求めことに帰着する。

以下、シートが一枚の時を考える。複数枚の時も同様に扱うことが出来る。

今、シートが完全に没水している( $d > 0$ )とすると、水面のポテンシャルを求める際の積分はGが散しないので、解析的に積分が出来る。

$$J = \int_{-B/2}^{B/2} \cos \beta x e^{ik(x-x_0)} dx$$

$$J_n = \int_{-B/2}^{B/2} \cos \beta x e^{-k_n(x-x_0)} dx$$

を求めておくと、 $x_0 \leq -B/2$ では

$$\begin{aligned} \phi(P) = iT\alpha\beta^2 J k C_0 \cosh k(z_0 + h) \sinh k(z + h) \\ - iT\alpha\beta^2 \sum_n J_n k_n C_n \cos k_n(z_0 + h) \sin k_n(z + h) \\ + \phi_1(P) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$x_0 \geq B/2$ では、上の $J$ と $J_n$ で指数関数の指数部の正負号を変えた積分を $J'$ と $J'_n$ とすると

$$\begin{aligned} \phi(P) = iT\alpha\beta^2 J' k C_0 \cosh k(z_0 + h) \sinh k(z + h) \\ - iT\alpha\beta^2 \sum_n J'_n k_n C_n \cos k_n(z_0 + h) \sin k_n(z + h) \\ + \phi_1(P) \end{aligned} \quad (6.3)$$

次に反射波のポテンシャルと通過波のポテンシ

シャルを考える。シートから充分離れて考えると、反射側でも通過側でも(6.2)式、(6.3)式の第2項目の減衰定在波は無視でき、反射波のポテンシャルは

$$\phi(P) = iT\alpha\beta^2 k C_0 J \cosh k(z_0 + h) \sinh k(z + h) \quad (6.4)$$

通過波のポテンシャルは

$$\phi(P) = iT\alpha\beta^2 k C_0 J' \cosh k(z_0 + h) \sinh k(z + h) + \phi_1(P) \quad (6.5)$$

と求められる。

## 7. Energy Loss モデル化

実際の Energy Loss はシート端部で発生する剥離渦によるものと考えられるが、渦を直接モデル化するのは難しいので、ここでは、全ての Energy Loss はシートの上下面の境界層内で起こるとしてモデル化する。

シートの上下面での圧力が(3.2)式で、流速が(4.2)式で表されるとすると、境界層の外側の流体が境界層に対してなす仕事は共役複素数も考慮して、

$$W = VP_2 - VP_1 = -V(P_1 - P_2) = -iT\alpha^2 \beta^2 \cos^2 \beta x (e^{-i2t} - e^{i2t})$$

となり、一周期では仕事がなされない。

仮に、 $V$  が(4.2)式より  $\pi/2$  位相のずれた成分

$$V' = \gamma \cos \beta x e^{-it} \quad (7.1)$$

を持っていたらそれによる仕事は、

$$W = V'P_2 - V'P_1 = -V'(P_1 - P_2) = \gamma T\alpha\beta^2 \cos^2 \beta x (e^{-2it} + 2 + e^{-2it})$$

となり、一周期間では、外側の流体は境界層に対し正の仕事をする。この仕事が境界層内で発生する Energy Loss となる。

次に(7.1)式の  $\gamma$  をモデル化することを考える。加藤・浜中(1994)と同様

$$\gamma = \alpha\beta^2 Tc \quad (7.2)$$

とすると(5.5)は、

$$\alpha = i \frac{\partial \phi_1(P) / \partial z_0}{1 + T\beta^2(I + ic_1)} \quad (7.3)$$

となる。

## 8. 2次元から3次元への拡張

基本的な解析方法は変化しないが、簡単のためシートを正方形とすると3次元の場合シートの間数

形が以下の様になる。

$$\zeta = \alpha \cos \beta x \cos \beta y e^{-it} \quad (8.1)$$

$$\zeta = \alpha \cos \beta x e^{-it} \quad (8.2)$$

ただし、(8.1)式は4辺固定、(8.2)式は2辺固定の場合である。シート1枚に対して、4辺固定の場合の(4.4)式に対応する式は

$$-i\alpha = 2iT\alpha\beta^2 \int_S \cos \beta x \cos \beta y \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} + \frac{\alpha \phi_1(P)}{\alpha_0}$$

となり、右辺の積分を実行できれば解は求まる。

2辺固定の場合は、

$$-i\alpha = -iT\alpha\beta^2 \int_S \cos \beta x \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} + \frac{\partial \phi_1(P)}{\alpha_0}$$

となる。

3次元の場合も、断面2次元同様に特異点近傍では、主値積分を用いて特別処理する必要がある。特異点の近傍では、Green 関数の実部は3次元の主要解  $-1/4\pi r$  に近づくことを利用して主値積分を行えば良い。

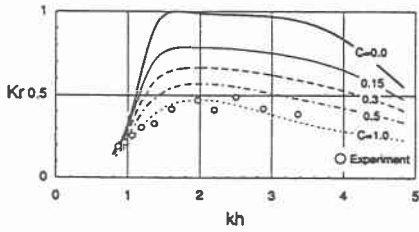
又、複数枚のシートの場合は、断面2次元の場合と同様、各々のシートの振動振幅を未知数として連立させて解けば良い。

## 9. 解析結果

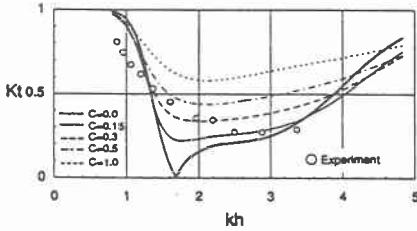
図5と図6は断面2次元・シート1枚の場合の反射率、透過率を加藤・浜中(1994)のポテンシャル接続法による結果との比較である。図中の  $c$  は Energy loss model (7.2)式の係数である。いずれの場合も細部を除いて一致しており、本解析方法の妥当性を示している。細部の違いは、本解析ではシートの変形を  $\cos \beta x$  と仮定したと同時に、シート上下面での圧力差、すなわちポテンシャルの差も  $\cos \beta x$  と仮定したことによる。この仮定ではシート端部で上下面のポテンシャルの差は零となるが、実際にはこの様な端部ではポテンシャルは特異となり、差は零とはならない。

しかしながら、この様な細部の違いがあったとしても、本解析では必要な未知数の数がシート1枚につき1個であることの有利さは変わらない。

図9は2枚のシートの間隔をかえたときの反射率の変化の様子を表したもので、右下から左上に向

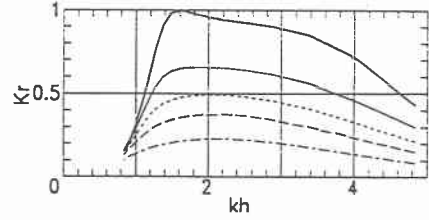


(a) 反射率

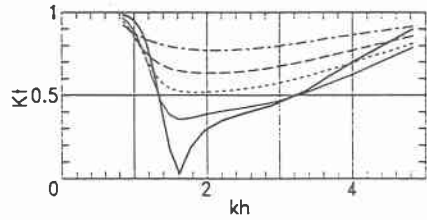


(b) 透過率

図5 1枚  $d/h=0.3$  (加藤より)

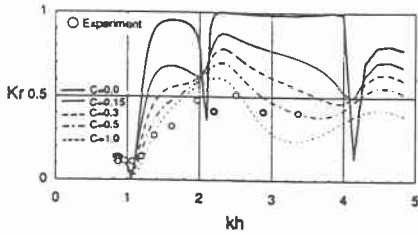


(a) 反射率

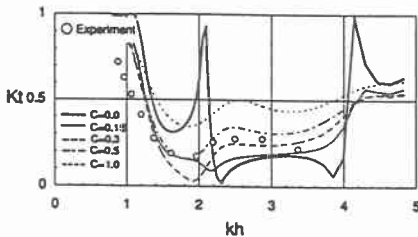


(b) 透過率

図6 1枚  $d/h=0.3$  本解析

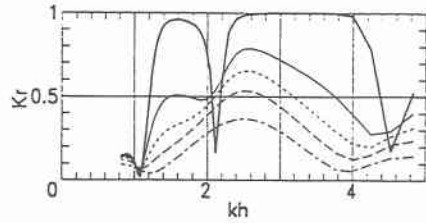


(a) 反射率

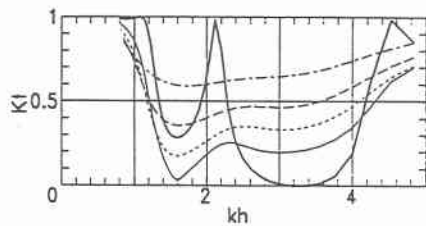


(b) 透過率

図7 2枚  $d/h=0.3$  (加藤より)



(a) 反射率



(b) 透過率

図8 2枚  $d/h=0.3$  本解析

けて  $kh$  が増加し、右上から左下に向けてシート間隔が増加している。右上端が、シートが接している状態で、左下端が、シート中間点が2波長分離した状態を表す。特徴をはっきり見るため Energy loss は零としている。これによると、いずれの  $kh$  に対してもシートを接して配した時の反射率が大きく、離して設置

する有利さはない。図には出さないが、Energy loss を考慮した場合もその傾向は変わらない。

図10は3次元解析の一例で、2辺固定のシートを10枚横に並べ、波を直角入射した場合である。周期は断面2次元で最も強い共鳴の生じた時のものを用いた。図(a)は水面波形で、シートの下流側に静穏域

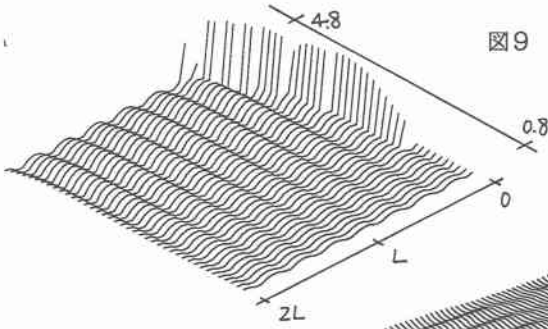


図9 反射率-シート間隔及び波長

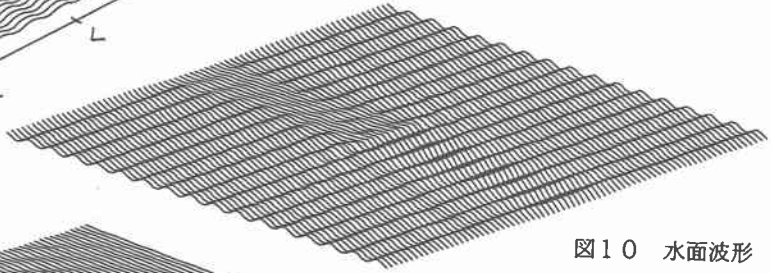


図10 水面波形  
(2辺固定10枚1列)

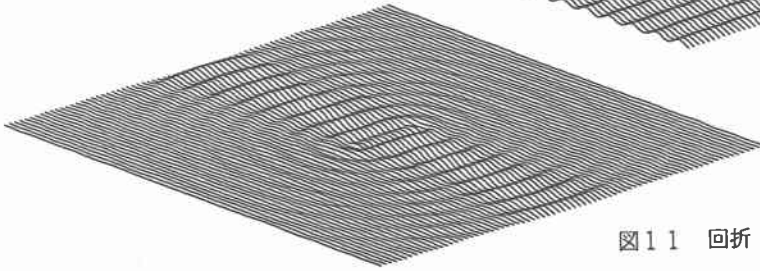


図11 回折・散乱波 (図10と同じ)

が、上流側には反射域ができてい様子分かる。図(b)は図(a)から入射波を差し引いた図で、回折・散乱波を示している。防波堤開口部から直角入射する波の回折実験では、開口幅の倍程度進行したあたりから波峰線は円くなることが確かめられており、この図でもそれが示されており、解の妥当性を示している。

なお、シート上の積分は、断面2次元では5節で述べた主値積分と解析的積分を用いた。3次元では、特異点近傍では主値積分を、それ以外では関数形が与えられているため、ガウスの公式による数値積分を行った。ここで用いた Green 関数は  $z_0$  で微分されており、所謂 Doublet 形である。通常、Doublet 形特異関数とポテンシャルの積の数値積分を精度良く求めるのは困難であるが、本解析ではポテンシャルの関数形を仮定したことにより精度良く求めることが出来た。

#### 10. あとがき

フレキシブルシート回りの波動場の解析について、Green 関数を用いた新しい方法を提案した。この方法では、Green 関数を用いたことと、さらにシート

の変位形とシート上下面での圧力差に適切な関数形を仮定したことにより、必要となる未知数の数をシート1枚につき1個とすることが出来た。これは他の解析方法に比べ、圧倒的に有利である。しかしながら、仮定した圧力差の関数形ではシート端部のポテンシャルの特異性を表現することが出来ず、ポテンシャル接続法とに若干の違いが生じた。今後この点を改良する必要があるだろう。

#### 参考文献

加藤雅也・浜中建一郎・佐藤幸雄(1993): テキスタイル消波構造物の波浪制御特性の解析と実験、海岸工学論文集、第40巻(2)、p.632-636

John, F.(1950): On the motion of floating bodies II, simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math., Vol.3, p. 45-101

Orihashi, T., Y. Watanabe and K. Hamanaka (1994): Modified Green function for water wave Problem, Proc. Int. Symp. : Waves-Physics and Numerical Modelling, Vol. II, p. 1002-1010