

II-65

3次元修正グリーン関数による波動場解析

北海道東海大学工学部 学生員 渡辺 勝弥

北海道東海大学工学部 正 員 浜中建一郎

1. はじめに

沿岸域での波動場の解析において海底形状や海岸線・防波堤などの境界の形状が複雑な場合は純解析的に扱うことは難しく、数値解析が用いられる。種々ある数値解析の方法の中でも現象が周期的と仮定しうるのは境界要素法が適用できる。境界要素法では一度、解が得られると任意の場所の任意の時刻の波が簡単に知れ利な方法といえる。この方法では海底形状が複雑な場合は、特異関数として主要解を用いる必要があり、その場合、考えている全ての境界面上にセグメントを配置する必要がある(例えば金戸・加藤・浜中:1994)。それに対し水深が一定と仮定しうる場合は特異関数としてGreen関数を用いることが出来、未知数を配置するのは構造物表面上のセグメントだけでよく3次元波動場の場合圧倒的に有利といえる。

波動場におけるGreen関数としてはJohn(1950)のものが従来用いられてきたが解の収束性の悪さが指摘されてきた。それに対し、Orihashi, Watanabe & Hamanaka(1994), 折橋・渡部・浜中(1994)はJohnのGreen関数の収束性の悪さの原因を明らかにし、その点を改良した断面2次元の修正Green関数を提案した。更に浜中・渡辺(1995)は3次元に拡張した修正Green関数を提案した。

本研究では、この3次元修正Green関数を用いた波動場解析の手法を述べ計算例を示す。

2. 3次元修正Green関数

水深一定の海域における波動場でのGreen関数に対する基礎方程式と境界条件は、角周波数 ω と重力加速度 g とで無次元化すると (x_0, y_0, z_0) を特異点として、以下のとおりである。

$$\Delta G = -\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial v} &= G & \text{on } z=0 \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= 0 & \text{on } z=-h \\ \text{Radiation} & \text{condition} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで Δ は3次元ラプラシアンで、放射条件とは特異点から充分離れた位置ではGreen関数は特異点から放射状に離れていく円筒波の関数形を持つ事を意味する。

(1) (2) 式を満たすGreen関数としては従来以下の(3)式で表されるJohn(1950)のものが使われてきた。

$$G = C_0 H_0^{(1)}(kr) A_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n K(k_n r) A_n(z) \quad (3)$$

ただし、 $H_0^{(1)}$: 0次の第1種Hankel関数

Wave analysis with 3-D modified Green function

by Katsuya Watanabe & Kenichiro Hamanaka

は

$$-\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (7)$$

で表される。この時 ϕ も G も水面と底面での境界条件を満たすから、そこでの (7) 式の右辺は零になり、必要な積分の境界は構造物表面と遠方境界だけとなる。そのうち遠方境界では G と、 ϕ の回折・散乱波は共に放射条件を満たすからそれによる積分は零になり、入射波と G との積分だけになる。この積分は (7) 式から P 点における入射波のポテンシャル ϕ_I を表すから (7) 式は、

$$-\phi(P) = \int_{S_b} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds - \phi_I(P) \quad (8)$$

となる。ここで S_b は構造物表面を表す。さらに特異点が境界上にあるときは

$$-\frac{1}{2}\phi(P) = \int_{S_b} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds - \phi_I(P) \quad (9)$$

である。境界要素法で境界上のポテンシャルを求めるには (9) 式が用いられ、一度境界上のポテンシャルが得られれば、(8) 式から任意の場所でのポテンシャルが求められる。

尚、(9) 式を求めるとき、用いる特異関数が主要解や、ここで用いた Green 関数のような Source 形の場合は始めから特異点を境界上において主値積分を行えばよいが、Doublet 形のような方向性を持つ特異関数の場合は次に述べる離散化した後で特異点を領域内部から境界に近づけた (8) 式の極限で考える必要がある。

次に境界要素法で解くために (9) 式の境界をセグメントで分割し、積分を離散化する。

$$-\frac{1}{2}\phi(P) = \sum_j \int_{S_j} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds - \phi_I(P) \quad (10)$$

今、固定されている構造物を考えることにすれば、その表面での法線方向の流速は零であるから、上式の被積分関数の第二項は消える。

さらに各セグメントで上の積分を実行するには種々の近似法が考えられるが、ここではそのうち最も簡単な近似である台形則を用いる。

各セグメントの中央点でのポテンシャルを ϕ_j 、Green 関数の法線微分を $\partial G / \partial v = \overline{G}_j$ とし、特異点の配置したセグメントを i とすると

$$-\frac{1}{2}\phi_i = \sum_j \phi_j \overline{G}_{ij} - \phi_{Ii} \quad (11)$$

特異点を全てのセグメントに移動させながら上式を求め連立させることにより ϕ_i が求められる。

4. 特異点の処理

前節で示した積分方程式の離散形 (11) 式は、セグメント上の積分を中央点の値で代表させた台形則によるが、特異点の位置するセグメント上では主値積分で積分値を求めておく必要がある。

ここで用いたGreen関数は3次元であるから、特異点近傍では3次元の主要解 $4\pi/r$ に近づく。特異点と同一平面上のこの関数の法線微分は零であるから、特異点の位置するセグメント上の積分は零となる。

しかしながら、没水平板の上下面のような平行した二つの水平面があるときは、特異点の位置するセグメントの真上あるいは真下にあるもう一方の平面のセグメント上の積分は零にならず、関数の特異性を考慮した主値積分を求めておかなければならない。

特異点を通る z 軸からの水平距離を r とすると

$r \geq 0$ では

$$H_0^{(1)}(kr) = 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right)$$

$$K_0(k_n r) = -\log \frac{k_n r}{2} - \gamma$$

ここで γ はガンマ定数

考えているセグメントをそれと同一面積をもつ円形で近似しその半径を R とすると

$$I = \int_s H_0^{(1)}(kr) ds = \pi R^2 + i 2 R^2 \left\{ \left(\log \frac{kR}{2} - \frac{1}{2} \right) + \gamma \right\}$$

$$I_n = \int_s K_0(k_n r) ds = -\pi R^2 \left(\log \frac{k_n R}{2} - \frac{1}{2} \right) - \pi \frac{R^2}{\gamma}$$

となることにより

$$\overline{G_n} \Delta S_i = \pm \left\{ k C_0 I \sinh k(z+h) \cosh(z_0+h) + \sum_n k_n C_n I_n \sin k(z+h) \cos k_n(z_0+h) \right\} \quad (12)$$

となる。

5. 解析例

図1は没水平板の回りの波の変形で入射波を差し引いた回折・散乱波を表している。無次元水深 $h=2.0$ で平板の厚さ×幅×奥行きは $T \times B \times W = 0.4 \times 4.0 \times 4.0$ で没水深を 0.8 から 1.6 まで 0.2 ずつ増加させた結果である。没水深が増加するに従って回折・散乱波は小さくなり物理的性質を良く表し解の妥当性を示している。

図2はJohnのGreen関数と比較のため鉛直面を増した $T \times B \times W = 1.0 \times 0.5 \times 2.0$ の構造物を水深 $h=1.4$ の所に中心での没水深を 0.6 に設置した場合である。(a) (b) (c) はGreen関数の展開項数を $N=50, 80, 100$ と増加させた場合いで解は大きな変化はなく安定している。それに対し図3はJohnのGreen関数を用いた場合で、鉛直面の面積が増したため、展開項数を変化させると解は大きく変化し安定していない。

このことにより、ここで用いられた3次元修正Green関数がJohnのGreen関数の収束性の問題を克服してい

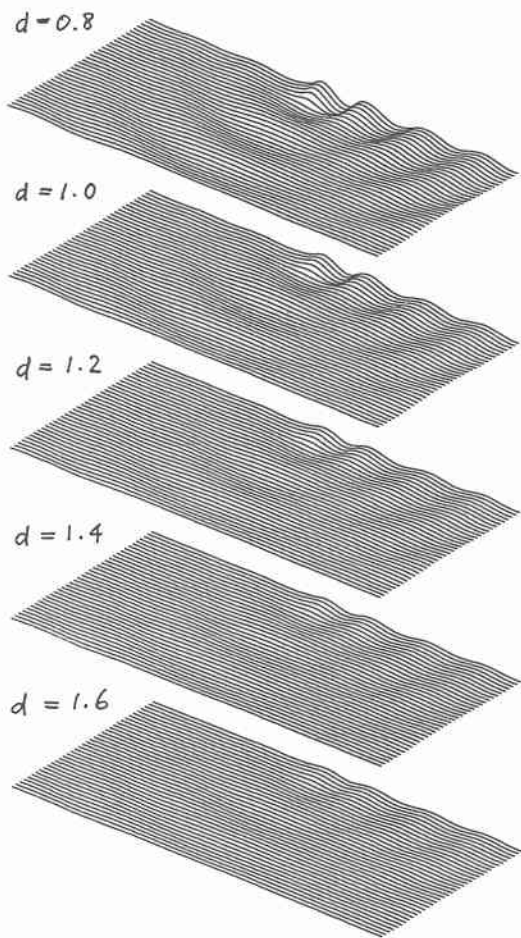


図1 没水平板による回折・散乱波

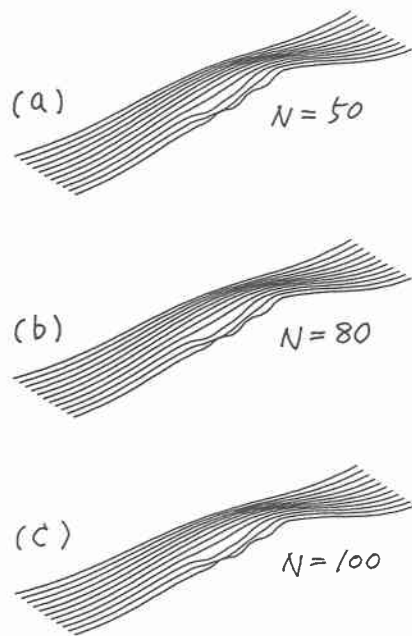


図2 展開項数による違い
(修正Green関数)

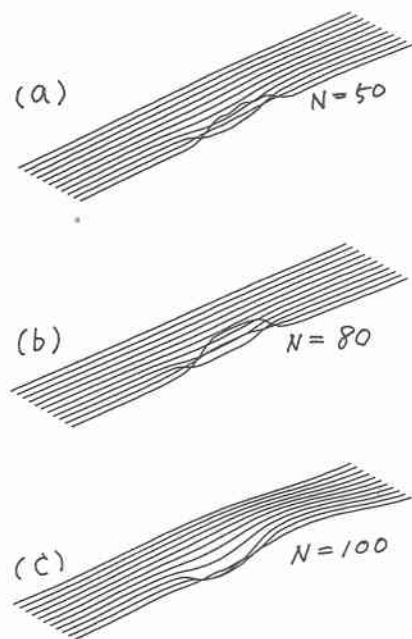


図3 展開項数による違い
(JohnのGreen関数)

る事が分かる。

6. あとがき

前節までで、著者等が提案した波動場における3次元修正Green関数を用いた構造物回りの波の回折・散乱の解析方法を述べた。さらに解析例からこの3次元修正Green関数がJohnのGreen関数の収束性の問題を克服していると同時に、物理的に妥当な解が得られる事が示された。

参 考 文 献

金戸俊道・加藤雅也・浜中建一郎 (1994) : グリーンの公式を用いた構造物回りの波の3次元変形と力、海洋開発論文集、Vol.10、p.49-54

John, F. (1950) : On the motion of floating bodies II, Simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math., Vol.3, p.45-101

Orihashi, T., Y. Watanabe and K. Hamanaka (1994) : Modified Green function for water wave problem, Proc. Int. Symp. : Waves - Physical and Numerical Modelling, Vol. II, p.1002-1010

折橋恒春・渡部靖憲・浜中建一郎 (1994) : 波動場における修正グリーン関数について、海岸工学論文集、第41回、Vol.1, p.26-30

浜中建一郎・渡辺勝弥 : 3次元修正グリーン関数について、土木学会道支部論文報告集、第51号、Vol.B, p.228-233