

II-56

Doublet 形主要解による境界上積分の精度

北海道東海大学工学部 学生員 工藤 康一
 北海道東海大学工学部 正員 浜中建一郎

1. まえがき

グリーンの公式に適当な特異関数を適用して得られるグリーンの積分方程式は、境界要素法によってラプラス方程式やヘルツホルム方程式を解く際、良く用いられる。例えば、金戸・加藤・浜中(1994)、Orihashi et al (1994)、Hamanaka (1995)。これ等の解析で用いられる特異関数は、所謂 Source 形の特異関数で積分方程式の境界上積分によって表されるのは、特異点の位置での速度ポテンシャルである。

それに対し、特異関数として所謂 Doublet 形のものを用いると、積分方程式の境界上積分によって表されるのは、特異点の位置での速度ポテンシャルの微係数となる。このタイプの積分方程式は境界要素法で、あまり多くは用いられてこなかったが、特定の問題に対しては、非常に有効であると考えられる。例えば、先川・比奈地・浜中(1996)、野村・脇坂・浜中(1996)。

しかしながら、この特異関数は Source 形の、それに比べ特異性が非常に強く、境界上の離散化した数値積分は最も簡単な台形則では、必要な精度が得られないことが、浜中・橋本(1995)によって報告されている。

このことから本研究では、離散化したセグメント上で、ポテンシャルとその法線微分は線形変化するとして近似した場合の積分の精度を調べることを目的とする。

2. セグメント上の主値積分

一般に特異点の位置でのポテンシャルは、断面2次元で主要解 $\log r$ を用いると、

$$2\pi\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2.1)$$

ポテンシャルの微係数は P 点の座標を (x_0, z_0) とすると、

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial \nu \partial x_0} - G \frac{\partial G}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2.2)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} = \int_S \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial \nu \partial z_0} - G \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2.3)$$

今、 i セグメント $(i-1, i)$ の $i-1$ 節点に原点を置く、局所座標 (ξ, η) を図1のようにとる。ただし、 η は領域の外側に向かうとする。

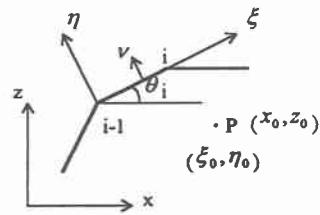


図1

セグメント上でポテンシャルとその法線微分は線形変形するとすると、セグメントの両端点での値を用いて以下のように表させる。ただし、簡単のため法線微分は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \bar{\phi} \quad (2.4)$$

と表す。

$$\phi = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{S_i} \xi + \phi_{i-1} \equiv \phi_A \xi + \phi_B \quad (2.5)$$

$$\bar{\phi} = \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{S_i} \xi + \bar{\phi}_{i-1} \equiv \bar{\phi}_A \xi + \bar{\phi}_B \quad (2.6)$$

(x, z) 座標と局所座標 (ξ, η) での微分の関数は、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta_i \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \theta_i \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta_i \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \theta_i \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.8)$$

である。(2.2) 式に (2.7) . (2.8) 式を適用してか

ら境界を離散化すると、

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial \alpha_0} = \sum_i \left[\cos \theta_i \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds - \sin \theta_i \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds \right] - \sum_i \left[\cos \theta_i \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds - \sin \theta_i \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds \right] \quad (2.9)$$

同様、式 (2.3) は、

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial \alpha_0} = \sum_i \left[\sin \theta_i \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds + \cos \theta_i \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds \right] - \sum_i \left[\sin \theta_i \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds + \cos \theta_i \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds \right] \quad (2.10)$$

必要な特異関数の微分は、式 (2) . (3) 合わせて、

$$G = \log r \quad (2.11)$$

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \quad (\eta = 0) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_0} = -\frac{\xi - \xi_0}{r^2} \quad \frac{\partial G}{\partial \eta_0} = \frac{\eta_0}{r^2} \quad (2.13) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \xi_0} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(\xi - \xi_0)^2}{r^4} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2\eta_0^2}{r^4} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \eta_0} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} = -\frac{2(\xi - \xi_0)\eta_0}{r^4} \quad (2.17)$$

である。

これらの関数と (2.5) . (2.6) 式との組合せで、セグメント上の積分に必要な積分は以下のとおりである。

$$I_{21} = \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds = -\bar{\phi}_A \xi_1 - \frac{\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B}{2} \left(\log |\xi_1^2 - 2\xi_0 \xi_1 + \xi_0^2 + \eta_0^2| - \log |\xi_0^2 + \eta_0^2| \right) + \bar{\phi}_A \eta_0^2 I_B \quad (2.18)$$

$$\text{ただし、} I_B = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\xi^2 - 2\xi_0 \xi + \xi_0^2 + \eta_0^2}$$

$$= \frac{1}{|\eta_0|} \left(\tan^{-1} \frac{\xi_1 - \xi_0}{|\eta_0|} - \tan^{-1} \frac{-\xi_0}{|\eta_0|} \right) \quad (2.19)$$

$$I_{22} = \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds = \frac{\bar{\phi}_A \eta_0}{2} \left(\log |\xi_1^2 - 2\xi_0 \xi_1 + \xi_0^2 + \eta_0^2| - \log |\xi_0^2 + \eta_0^2| \right) + (\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B) \eta_0 I_B \quad (2.20)$$

$$I_{23} = \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} ds = \phi_A \eta_0 \frac{\xi_1}{\xi_1^2 - 2\xi_0 \xi_1 + \xi_0^2 + \eta_0^2} + \phi_B \eta_0 \left(\frac{1}{\xi_1^2 - 2\xi_0 \xi_1 + \xi_0^2 + \eta_0^2} - \frac{1}{\xi_0^2 + \eta_0^2} \right) - \phi_A \eta_0 I_B \quad (2.21)$$

$$I_{24} = \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} ds = -\frac{\phi_A}{2} \left(\log |(\xi_1 - \xi_0)^2 + \eta_0^2| - \log |\xi_0^2 + \eta_0^2| \right) + \frac{(\phi_A \xi_1 + \phi_B)(\xi_1 - \xi_0)}{(\xi_1 - \xi_0)^2 + \eta_0^2} + \frac{\phi_B \xi_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2} \quad (2.22)$$

3. 接点近傍の主値積分

特異点が i 節点に近づくとき、 S_i segment、 S_{i+1} segment 各々の積分は発散する。従って、図2の様
に二つの segment を同時に考慮して主値積分を求め
る。

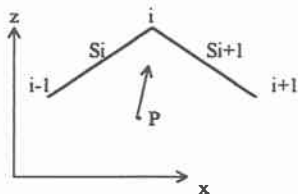


図2

最初に、 P 点での x 方向の微分に対する微分方程式について述べる。(2.3) 式から S_i と S_{i+1} 上の積

分だけ取り出すと、

$$\begin{aligned}
 I_i = & \cos \theta_i \left\{ \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} d\xi - \int_{S_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} d\xi \right\} \\
 & - \sin \theta_i \left\{ \int_{S_i} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} d\xi - \int_{S_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} d\xi \right\} \\
 & + \cos \theta_{i+1} \left\{ \int_{S_{i+1}} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi_0} d\xi - \int_{S_{i+1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \xi_0} d\xi \right\} \\
 & - \sin \theta_{i+1} \left\{ \int_{S_{i+1}} \phi \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta_0} d\xi - \int_{S_{i+1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \eta_0} d\xi \right\}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) 式の右辺の各積分に前節で求めた $I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}$ を代入する。特異点 P を節点 i に近づけた極限を考えるのだが、右辺に含まれる全ての項は以下の様な4つのタイプに分類出来る。

- (a) 一つのセグメント上で極限值が有限確定する項。
- (b) \log タイプで発散する項。
- (c) 有限形式タイプで発散する項。
- (d) $\eta_0 I_B$ に関係する項。

このうち (a) のグループはそのまま積分値として用いられる。(b) のグループは節点 i での ϕ の微係数に関係しており全体を、

$$\bar{\phi}_i^{(i)} \cos \theta_i + \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{S_i} \sin \theta_i \quad (3.2)$$

$$-\bar{\phi}_i^{(i)} \cos \theta_{i+1} - \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{S_{i+1}} \sin \theta_{i+1} \quad (3.3)$$

の二つの係数でまとめられる。ただし、上付き添え字 (i), (i+1) でセグメントを区別する。

ϕ はセグメント上で直線変化としたから、前者の係数は接点 i での ϕ の z 方向微係数、後者の係数はその逆符号となり互いにキャンセルし合う。

(c) のグループは S_i セグメントと S_{i+1} セグメントの i 点での外角を係数とする正負号逆の2項にまとめられ、やはりキャンセルし合う。(d) のグループの中の $\eta_0 I_B$ は、 P 点から各々のセグメントの両端点に向かう角を表しており、二つのセグメントで考えて P 点を接点 i に近づけた極限は i 点での外角を表す。

以上のことを考慮して S_i と S_{i+1} 上の積分を整理すると以下の様になる。

$$\begin{aligned}
 I_i = & \cos \theta_i \left\{ \left(\bar{\phi}_i^{(i)} - \bar{\phi}_{i-1}^{(i)} \right) - \frac{\bar{\phi}_i^{(i)}}{2} \log S_i^2 \right\} \\
 & - \sin \theta_i \left\{ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{2S_i} \log S_i^2 + \frac{\phi_{i-1}}{S_i} \right\} \\
 & + \cos \theta_{i+1} \left\{ \left(\bar{\phi}_{i+1}^{(i+1)} - \bar{\phi}_i^{(i+1)} \right) + \frac{\bar{\phi}_i^{(i+1)}}{2} \log S_{i+1}^2 \right\} \\
 & - \sin \theta_{i+1} \left\{ -\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2S_{i+1}} \log S_{i+1}^2 + \frac{\phi_{i+1}}{S_{i+1}} \right\} \\
 & + \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{S_i} \cos \theta_i - \bar{\phi}_i^{(i)} \sin \theta_i \right) \frac{\beta_i}{2} \\
 & + \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{S_{i+1}} \cos \theta_{i+1} - \bar{\phi}_i^{(i+1)} \sin \theta_{i+1} \right) \frac{\beta_i}{2}
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. 積分精度および考察

本節では具体的なポテンシャルの関数形に対し前節まで述べたセグメント上の積分と接点近傍の主値積分を用いて、境界上積分の精度を検討する。与えたポテンシャルは、

$$\phi = \cos x \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.1)$$

である。

図3の様な二つの領域を考え、全境界をほぼ等間隔にセグメントで離散化し (2.9), (2.10) 式の右辺の積分を行った。

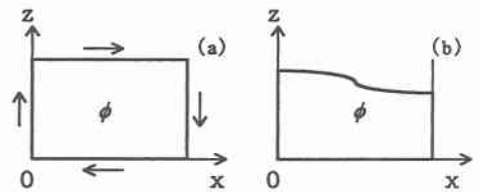


図3

図4はその結果で、特異点は原点から境界に沿って図3. (a) の矢印の方向に移動させた。図の横軸は移動量を表し、最大値はセグメントの総数である。又、実線は真値を、破線は推定値を示す。

(a-1,2,3) は図3の (a) に (b-1,2,3) は図3の (b) に対応する。いずれの場合も二つの微係数は分割数

を増加させるに従って真値に近づいており、前節で与えた積分と主値積分が妥当であることを示している。又、浜中・橋本（1995）が台形則近似に対して報告している分割数を増やすと精度が悪くなるということは起きず、ここで用いた線形近似の妥当

性も示している。しかしながら、用いた分割数に比べ線形近似の精度そのものは期待した様ではなく、このままでは波動場解析に用いることは困難と思われる。今後さらに精度の良い近似、例えば、曲線近似を考えていく必要があると思われる。

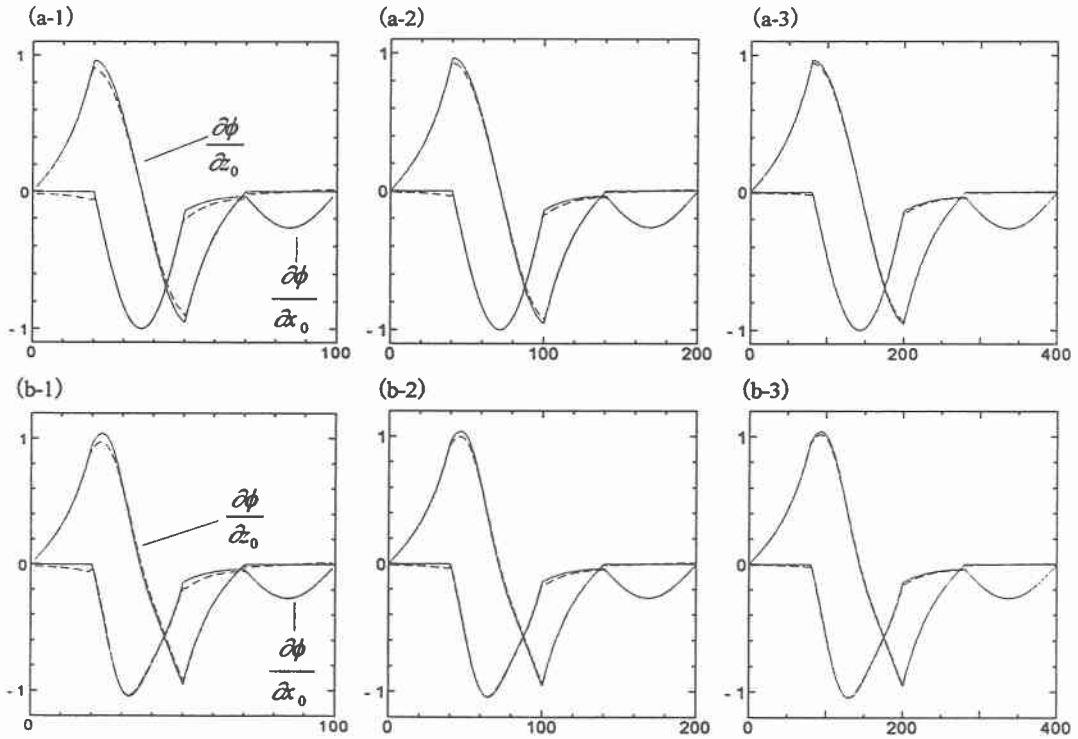


図4

参考文献

金戸俊道・加藤雅也・浜中建一郎（1994）：グリーンの公式を用いた構造物回りの波の3次元変形と力、海洋開発論文集、p.660 - 663

Orihashi, T. , Y.Watanabe & K.hamanaka（1994）：Modified Green function for water wave problem , The Int . Symp . : Waves - Physical and Numerical Modelling , Vol . II , p.1002 - 1010

Hamanaka , K.（1995）：Fundamental solution and boundary conditions on oscillations in harbors of arbitrary geometry , 11th Austrasian Coastal & Ocean Engineering Conference , p.163 - 68

先川信・比奈地茂之・浜中建一郎（1996）：グリーン関数を用いたフレキシブシート回りの波動場解析、第52回 土木学会道支部論文報告集、印刷中

野村圭司・脇坂昌幸・渡部靖憲・浜中建一郎（1996）：panel法による波動場解析、第52回 土木学会道支部論文報告集、印刷中

浜中建一郎・橋本建（1995）：薄板、薄膜部材を持つ構造物による波の変形、第51回 土木学会道支部論文報告集、Vol.B , p.292 - 297