

II-55 Panel 法による波動場解析

北海道東海大学工学部 学生員 野村 圭司
 北海道東海大学工学部 脇坂 昌幸
 北海道大学工学部 学生員 渡部 靖憲
 北海道東海大学工学部 正 員 浜中建一郎

§ 1 はじめに

波動場の数値解析については、断面2次元、平面2次元、3次元各々に対し多くの解析方法が提案されているが、海岸近傍の非線形性の強い波動場に対しては、非線形性に関して何ら仮定や近似を用いない、Broeze(1992)による Panel 法が有効と思われる。この方法は原理的には、Lagrange 座標で表された境界条件(特に自由水面)を用いて次の時間 step での境界の位置と、そこでのポテンシャルを求め、次に Green の公式による積分方程式を解いて水面でのポテンシャルの法線微分と他の境界でのポテンシャルを求め、最後にさらに時間 step を進めるために必要となるポテンシャルの他の微係数(接線微分)をなんらかの方法で求めるといふものである。

この方法では、水面の様な曲線境界や、境界に沿ったポテンシャルとその法線微分の形状をどのように近似するかと言うことと、境界上の接線微分をいかにして求めるかに解析の精度が大きく依存するようである。

本研究では境界上のポテンシャルの微係数を求めるのに、微係数に対する Green の積分方程式を併用する方法を提案する。

§ 2でこの方法の一般理論について述べる。§ 3で境界形状や関数形の種々の近似方法について述べ、§ 4でその中のひとつである直線近似を用いた場合の解析方法を述べる。さらに§ 5で必要となる主値積分について述べる。

§ 2 基礎方程式と境界条件

非圧縮、非粘性、非回転として、速度ポテンシャルは、

$$\Delta \phi = 0 \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

自由水面での境界条件を Lagrange 座標で表すと、

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - gz \quad (3)$$

底面での境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad \text{on } S_b \quad (4)$$

造波板での境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = V_m \quad (5)$$

V_m ; 造波板の法線変位速度

以下次節で必要となる積分方程式をあげる。特異点 P を領域内部にとりその座標を (x_0, z_0) とする。

$$2\pi\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (6)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial x_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial x_0} - \frac{\partial G}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (7)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(P)}{\partial z_0} = \int_s \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial z_0} - \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (8)$$

$$G = \log r, r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Wave analysis using a panel method by K.Nomura,
 M.Wakisaka, Y.Watanabe and K.Hamanaka

§ 3 Panel法による解析手順

以下に Panel 法による解析手順を簡単に箇条書きにする。

1、境界の種類を以下の様にする。

- 自由水面 : Sf
- 底面 : Sb
- 斜面 : Sp
- 造波板 : Sm

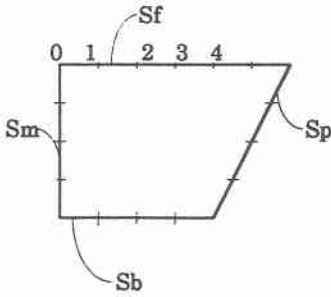


図. 1

2、各々の境界に Panel を配置する Panel の節点に時計回りに通し番号を付ける。

3、各節点で、 ϕ, ϕ_x, ϕ_z, v を考える。移動する節点では節点の座標を (x, z) と考える。ここで v は境界上の法線ベクトル (底面以外の Panel は移動する。)

4、今、ある時間 t で上の 3、で考えた全ての量が得られているとすると、水面では § 1 の (2) と (3) から $t + \Delta t$ 後の (x, z) とその位置での ϕ が得られる (時間差分による)。

5、造波板上と斜面上の Panel の節点も流速に従って移動させる。

6、次の時間ステップの計算に必要となる量を 2 段階で求める。

最初に (6) を離散化して境界要素法でラプラス方程式 (1) を解くそのときの未知数は、

$$SF : \phi_v$$

$$Sb, Sp, Sm : \phi$$

7、上の 6 で、全ての境界で ϕ と $\partial\phi/\partial n$ が

求まったから、微係数に対する積分方程式 (7)、(8) により Sb、Sp、Sm 上での ϕ の接線微分を求める。

8、4、に戻り繰り返す。

§ 4 Panel法で必要となる近似

Panel 法で波動場を解くには、いくつかの近似を考える必要がある。すなわち、境界形状 (特に自由水面)、境界上でのポテンシャルとその法線微分、及び境界上での特異関数である。

この中でもっともあらい近似は Panel を直線近似 (節点間を直線で結ぶ) したうえで、ポテンシャル、その法線微分、特異関数を Panel の中央点で近似し、ひとつの Panel 上では一定とする台形近似の方法である。しかし、この方法では、一般の Panel 上のポテンシャルに対する積分方程式は程々に解けるものの境界の折れ曲がり部では近似が悪くなるばかりでなく、ポテンシャルの微係数に対する積分方程式では近似は極端に悪くなり用いることが出来ないことが浜中・橋本 (1995) により指摘されている。

これは、Panel (segment) を小さくしていくと、特異点を配置した Panel 上の積分は精度が上がるものの、それに近接した Panel 上での特異関数の特異性が強くなり (にもかかわらず Panel 中央点での値で代表している) 積分の精度が落ちるためである。

次に考えられる近似としては、境界形状は直線近似したままで、ポテンシャルとその法線微分は節点上での値で代表させ、その間を直線近似する方法である。このとき、特異関数は近似せず、境界上で直線変化するポテンシャルとその法線微分との積の積分 (及び主値積分) を解析的に求めておく。この近似だと、特異関数に対する近似は用いないため、前記の台形近似のときのような Panel を小さくするとかえって精度が悪くなるということは起きなくなると考えられる (以下この近似を直線近似と呼ぶ)。この方法での問題点は、自由水面上の節線で法線の向きが不連続になることにある。しかしながら、ポテンシャルに対する積

分方程式を解くときは、節点上のポテンシャルの法線微分の値が未知数となり、方向は陽には現れないため、形式的には解ける。ただし特異関数の法線微分は Panel に直角にとるため、節点で不連続になり、その整合性を考えておく必要があるだろう。

さらに精度をあげる方法としては、Panel 形状やポテンシャルとその法線微分を近傍の節線上の値を用いて2次関数や3次関数で近似する方法だろう(この近似を以下曲線近似と呼ぶ)。この方法では、Panel 上の解析的積分(及び主値積分)が複雑になり、その結果プログラムも複雑になり計算時間も長くなるであろう。

直線近似、曲線近似いずれの方法であっても、水面と底面や水面と造波板との交点では法線微分は物理的に不連続となるから、そこでの主値積分は厳密に求めておかなければならない。

§5 直線近似における主値積分

解析方法の手順6では積分方程式を離散化し、まだ求まっていない境界上のポテンシャルやその法線微分を求める。その際、特異点を境界の節点に近ずけた極限としての Panel 上の主値積分を求めておく必要がある。

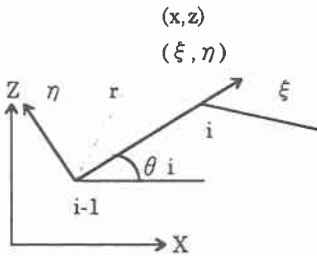


図. 2

今、考えている閉領域の境界上の節点に時計回りで番号を付ける。どの Panel でも若い番号の節点からみるといつも左側が領域外となる。図. 2のように Panel に ξ 軸を一致させた局所座標 (ξ, η) を考えると、法線方向は常に η 軸と一致する。このとき、 (x, z) と (ξ, η) との関係は、

$$\begin{aligned}\xi &= (x - x_{i-1}) \cos \theta_i + (z - z_{i-1}) \sin \theta_i \\ \eta &= (z - z_{i-1}) \cos \theta_i - (x - x_{i-1}) \sin \theta_i\end{aligned}$$

ここで Panel の長さを S_i とすると、

$$\begin{aligned}\cos \theta_i &= (x_i - x_{i-1}) / S_i \\ \sin \theta_i &= (z_i - z_{i-1}) / S_i\end{aligned}$$

特に、特異点の x, z 座標を (x_0, z_0) とすると局所座標では、

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (x_0 - x_{i-1}) \cos \theta_i + (z_0 - z_{i-1}) \sin \theta_i \\ \eta_0 &= (z_0 - z_{i-1}) \cos \theta_i + (x_0 - x_{i-1}) \sin \theta_i\end{aligned}$$

Panel 上でポテンシャルとその法線微分は直線変化するとしたから、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{S_i} \xi + \phi_{i-1} \equiv \phi_A \xi + \phi_B \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \bar{\phi} = \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{S_i} \xi + \bar{\phi}_{i-1} \\ &\equiv \bar{\phi}_A \xi + \bar{\phi}_B\end{aligned}$$

と表す。

以下必要となる Panel 上の積分を求めておく。最初に特異点は領域内部にあるとして、

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\eta - \eta_0}{r^2}$$

だから、

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_S \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \int_0^{S_i} (\phi_A \xi + \phi_B) \frac{\eta - \eta_0}{r^2} d\xi \\ &= -\frac{\phi_A \eta_0}{2} \left(\log |(S_i - \xi_0) + \eta_0^2| - \log |\xi_0^2 + \eta_0^2| \right) \\ &\quad - (\phi_A \xi_0 + \phi_B) \eta_0 I_B\end{aligned}\quad (9)$$

ここで、

$$I_B = \frac{1}{|\eta_0|} \left(\tan^{-1} \frac{S_i - \xi_0}{|\eta_0|} - \tan^{-1} \frac{-\xi_0}{|\eta_0|} \right)$$

同様に、

$$\begin{aligned}I_{12} &= \int_{S_i} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds = \int_0^{S_i} (\bar{\phi}_A \xi + \bar{\phi}_B) \log rd\xi \\ &= \frac{\bar{\phi}_A}{4} \left[\left\{ (S_i - \xi_0)^2 + \eta_0^2 \right\} \log \left\{ (S_i - \xi_0)^2 + \eta_0^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - (\xi_0^2 + \eta_0^2) \log (\xi_0^2 + \eta_0^2) - (S_i - \xi_0)^2 + \xi_0^2 \right] \\ &\quad + \frac{\bar{\phi}_A \xi_0 + \bar{\phi}_B}{2} \left[(S_i - \xi_0) \log \left\{ (S_i - \xi_0)^2 + \eta_0^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \xi_0 \log (\xi_0^2 + \eta_0^2) - 2\xi_1 + 2\eta_0 I_B \right]\end{aligned}\quad (10)$$

(9)式、(10)式において、特異点を節点に近づけると積分中の I_B は近づけた方に依存する。従ってここでは節点 i の両側の Panel を同時に考慮する。

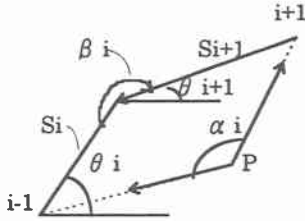


図. 3

法線微分には上付き添字 (i)、($i+1$) を付けて

Panel 番号を区別すると

$$S_i \text{ 上で } \xi_0 \rightarrow S_i, \eta_0 \rightarrow 0$$

$$S_{i+1} \text{ 上で } \xi_0 \rightarrow 0, \eta_0 \rightarrow 0$$

の極限を考えるのだが、各々に対する $\eta_0 I_B$ は特異点から Panel 両端に向かう角度に η_0 の符号を付けた量を表し、 η_0 は常に負の側から零に近づくことを考慮すると、

$$-\eta_0 I_B \Big|_{S_i} - \eta_0 I_B \Big|_{S_{i+1}} \rightarrow \beta_i$$

となる。

従って、特異点が i 節点に近づいた時の S_i 上と S_{i+1}

上の積分の和の極限は、

$$\begin{aligned} I_i = & \phi_i \beta_i + \frac{\bar{\phi}_i^{(i)} - \bar{\phi}_{i-1}^{(i)}}{4S_i} \left\{ -S_i^2 \log S_i^2 + S_i^2 \right\} \\ & + \frac{\bar{\phi}_i^{(i)}}{2} \left\{ S_i \log S_i^2 - 2S_i \right\} \\ & + \frac{\bar{\phi}_{i+1}^{(i+1)} - \bar{\phi}_i^{(i+1)}}{4S_{i+1}} \left\{ S_{i+1}^2 \log S_{i+1}^2 - S_{i+1}^2 \right\} \\ & + \frac{\bar{\phi}_i^{(i+1)}}{2} \left\{ S_{i+1} \log S_{i+1}^2 - 2S_{i+1} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

手順6でポテンシャルに対する積分方程式を解いて、底面及び造波板上でのポテンシャル、及び水面でのポテンシャルの法線微分を求めるには、(9)、(10)、(11)式の積分を用いる必要があるが、本来曲線である水面上の節点ではポテンシャルの法線微分は1個であるべきであるから、

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_i^{(i)} = \bar{\phi}_i^{(i+1)}$$

とすることより、未知数の数と方程式の数が一致し解ける。

しかしながら、物理的に境界が折れ曲がった点、たとえば、水面と斜面の交点や、水面と造波板との交点では上式のように区別して扱う必要がある。

また、手順7では、ポテンシャルの微分に対する積分方程式を積分して、境界上の節点でのポテンシャルの x 微分 z 微分を求める必要があるがそのとき(9)、(10)、(11)式と同様な解析的積分を求めておく必要があるが、特異関数は Doublet 形となりさらに複雑となる。この点に関しては工藤・浜中(1996)を参照してほしい。

§6 おわりに

前節までで、ポテンシャルの微分に対する積分方程式を伴用した Panel 法について、その一般論、種々の近似方法及びその中のひとつである直線近似による解析方法を述べた。具体的な数値解析の結果は次報で報告する予定である。

しかしながら、工藤・浜中(1996)によれば微分に対する積分方程式の直線近似では期待したほどの精度が得られていない。このことから、直線近似による Panel 法でもよい精度はあまり期待できないが、今後より精度の高い近似方法を用いた解析手法を開発する際の比較の対象として、数値結果を出しておくことは意味のあることと思われる。

参考文献

- J. Broeze(1992) : Computation of breaking waves with a panel method, Coastal Engineering p. 89-102
- 浜中建一郎・橋本健(1995) : 薄板・薄膜部材を持つ構造物による波の変形、土木学会道支部論文報告集、vol.51-II、p.292-297
- 工藤康一・浜中建一郎(1996) : Doublet 形主要解による境界上積分の精度、土木学会道支部論文報告集、vol.52、投稿中