

砂州の移動速度に関する研究

北海道大学工学部 学生員 平野 誠治
 北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男
 北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

砂礫の運動は流体力と抵抗力の相対的な関係によって決まる。流体力は乱流場では時間的に変動し、抵抗力も、粒子の大きさ、形状、存在位置により変化する。従って、粒子の運動は、本来確立的であり、移動と停止の断続的な運動を繰り返しながら、底面上を軌道したり、小跳躍を行いながら移動するもの、小跳躍の過程において上昇流により浮上し、かなりの距離ほとんど流速と同じ速度で移動し、再び河床に落下するものなどいろいろな形式があり、それぞれによって停止時間と移動時間の比率は大きく異なる。しかし、これはいずれも河床砂と交換しながら移動する流砂である。しかし、このほかに、移動を開始してから最終的に停止するまで流水の乱れに保持されたまま、河床砂とほとんど交換なしに流下する成分もある。このように掃流砂礫の運動はこのように極めて複雑であり、特に、移動河床で形成される河床波上の砂礫の運動特性を完全に記述するまでには至っていない。しかし、平均的な掃流砂量を求めるためには、必ずしも個々の砂礫の運動特性から議論する必要はなく、適当な流砂モデルによる解析や実験値による流砂量式も有効である。実際にこうしたモデルは数多く存在する。ここでは、このような個々の砂礫の確立的な運動特性を問題にしない平均的な量を対象にした流砂量式を求め、流砂の擾乱について解析を進めていくことにする。

2. 基礎方程式とその無次元化

河床のみが流れによって変形する矩形水路について考える。ただし、河床の移動速度は流れの速度に対して十分遅いものとする。流れは2次元浅水モデルで表されるものとし、流下方向にX軸、横断方向にY軸をとると、x, y方向の流れの運動方程式及び流砂の運動方程式はそれぞれ以下のように表すことができる。(ただし、u, v : x, y方向の流速成分、I : 水路床勾配、h : 水深、ρ : 水の密度、η : 河床形状、g : 重力加速度、τ_x, τ_y : x, y方向の河床せん断力、n : の土の空隙率、q_x, q_y : x, y方向の流砂量。)

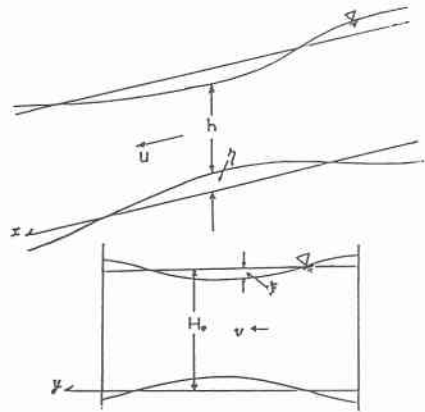


図-1

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g I_0 - \frac{\tau_x}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\tau_y}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial y} (h + \eta) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u h) + \frac{\partial}{\partial y} (v h) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

Research into the Pace of a Sand Bar

by Seiji HIRANO, Mikio KUROKI and Tadaaki ITAKURA

次に、各変量を、基本流に対応する平均量と、河床の微小な擾乱に対応する変動量に分けて次式のように表す。

$$\begin{aligned} u &= U_0 (1 + \tilde{u}), v = U_0, \tau_x = \tau_{b0} (1 + \tilde{\tau}_x), \tau_y = \tau_{b0} \tilde{\tau}_y, h = H_0 (1 + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}) \\ \eta &= H_0 \tilde{\eta}, \tilde{\xi} = H_0 \tilde{\eta}, q_{Bx} = q_{B0} (1 + \tilde{q}_{Bx}), q_{By} = q_{B0} \tilde{q}_{By} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)を用い、式(1)、(2)、(3)、(4)に代入し、線形化及び無次元化をすると次式を得る。

$$Fr^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} + I_0 (\tilde{\eta} - \tilde{\xi} - \tilde{\tau}_x) = 0 \quad (6)$$

$$Fr^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}} + I_0 \tilde{\tau}_y = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + A_s \left(\frac{\partial q_{Bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial q_{By}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0 \quad (9)$$

ただし、 $\tilde{x} = \frac{x}{H_0}$, $\tilde{y} = \frac{y}{H_0}$, $\tilde{t} = \frac{t U_0}{H_0}$, $Fr^2 = \frac{U_0}{g H_0}$, $A_s = \frac{q_B}{(1-\pi) U_0 H_0}$

次に流れの抵抗則であるが、本解析では、平坦床の抵抗則、Mannig-Strickler型の表現を用いて、次式のよ

$$\phi = 6.9 \left(\frac{h}{d} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (10)$$

また、流れの抵抗は主として水深粒径比に依存し、 $\frac{u}{u_*} = \phi \left(\frac{h}{d} \right)$ と書ける。これを河床せん断力に関する表現式に変形し、式(5)の関係を代入し、線形化すると、

$$\tau_x = \alpha_1 \tilde{u} - \alpha_2 (\tilde{\xi} - \tilde{h}) \quad (11)$$

ただし、 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{2H_0/d}{\phi(H_0/d)} \frac{d\phi}{dh} \Big|_{h=H} = \frac{1}{3}$

砂粒運動を近似的に定常とし、関係式を導くと、

$$\tilde{\tau}_y = \tilde{v} + \alpha_3 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2} \frac{\Phi(\tau_{*0})}{\mu \phi \left(\frac{H_0}{d} \right) \sqrt{\tau_{*0}}} \quad (12)$$

$$\tilde{q}_{By} = \tilde{v} - \alpha_4 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c} \mu}{\tau_* + \mu c}} \quad (13)$$

ただし、 μ_c, μ はそれぞれ静止、動摩擦係数であり、 $\mu_c = 0.8, \mu = 0.5$ とする。無次元限界掃流力 τ_{*c} は、近似的に $\tau_{*c} = 0.06$ とした。

また、 $\phi = 8 (\tau_{*0} - \tau_{*c})^{1.5}$ とする。

本論では、“遅れ距離” δ の概念を導入し、局所流砂量を次式のように表す。

$$\frac{q_B(x)}{\sqrt{sgd^3}} = \phi(\tau_x(x-\delta)) \quad (14)$$

$$\tilde{q}_x = a_5 \tilde{\tau}_x (\tilde{x} - \tilde{\delta}) \quad , \quad a_5 = \frac{\tau_{x0}}{\phi(\tau_{x0})} \left. \frac{d\phi}{d\tau_x} \right|_{\tau_x = \tau_{x0}} \quad (15)$$

ここに、 $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{H}$ は、無次元遅れ距離である。 $\tilde{\delta}$ を λ とし、Einsteinの半理論式より、

$$\lambda = 100d \left\{ 1 - \exp\left(1 - \frac{0.391}{\tau_{x0}}\right) \right\}^{-1} \quad : \quad \tau_{x0} > \tau_{xc} \quad (16)$$

3. 河床の不安定解析

河床に次式のような二重調和関数で表される微小な擾乱を与える。

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} \cos(l\tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \quad (17)$$

ただし、 $C = Cr + kCi$ は河床の無次元複素移動速度、 k, l は \tilde{x}, \tilde{y} 方向の波数であり、次式で定義される。

$$k = \frac{2\pi H_0}{2L}, \quad l = \frac{m\pi H_0}{B} \quad (18)$$

ここに、 L は三角波の波長、 B は水路幅、 m は横断方向の分割数。 $(m=1: \text{単列砂州}, m \geq 2: \text{複列砂州})$ 式(17)より、各変動量は、次式で表される。

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}, \tilde{u}, \tilde{\tau}_x, \tilde{q}_B) &= (\hat{\xi}, \hat{u}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_B) \cos(l\tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \\ (\tilde{v}, \tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{By}) &= (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_{By}) \cos(l\tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \end{aligned}$$

上式に式(6)、(7)、(8)、(9)、(11)、(12)、(13)及び(15)を代入して整理すると一つの連立方程式が得られる。左辺のマトリックスのディターミナント=0より

$$\begin{aligned} kCi &= f(\tau_{x0}, l, k, I_0) \\ Cr &= g(\tau_{x0}, l, k, I_0) \end{aligned}$$

河床擾乱の不安定領域 ($kCi > 0$) の時のみ砂州は発達するので、 k, l がどのような値の時に ($kCi > 0$) となるかを図-2に示した。

次に、ある l に於ける ($k-kCi$) の関係を調べる。 l が変わると kCi の値も変化することがわかるが、 m に依存するために l は連続したものでなく、離散的なものとなる。 l と kCi の関係を図-3、図-4に示すが、実際にとり得る l は小さい方の l を l_1 、大きい方の l を l_2 とすると $l_2 = 2l_1$ となる。 $kCi_{\max}(l_1) < kCi_{\max}(l_2)$ のときは複列の砂州が卓越し、逆のときは単列の砂州が卓越する。

$kCi_{\max}(l_1) = kCi_{\max}(l_2)$ のときの l を l_* 、 $kCi_{\max}(l_*) = 0$ となるとき l を l_0 とすると $l_2 < l < l_0$ のときに限り、単列砂州の擾乱が卓越することがわかる。そのとき l は値にある幅を持っているのでその l に対する C_r もある幅をもつ。 τ_{x0} と C_r の関係を図-5に示す。

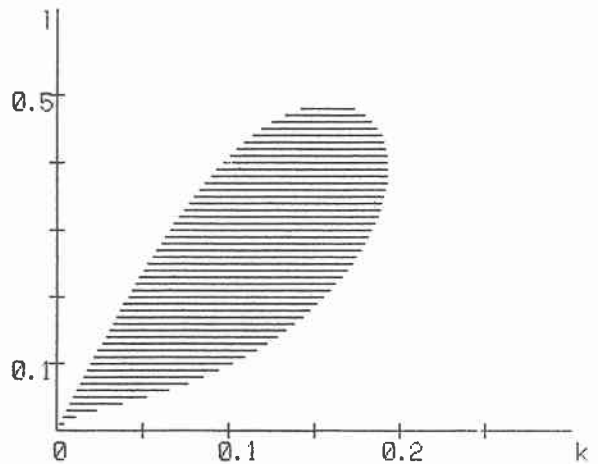


図-2 $kCi > 0$ の領域 ($I_0 = 0.01, \tau_{x0} = 0.20$)

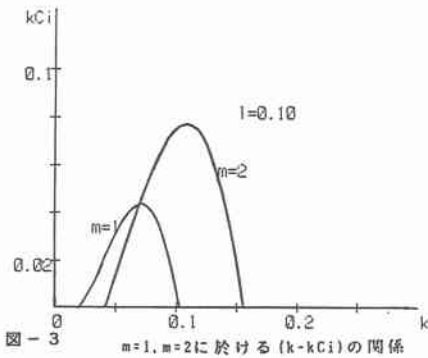


図-3 $m=1, m=2$ に於ける $(k-kCi)$ の関係

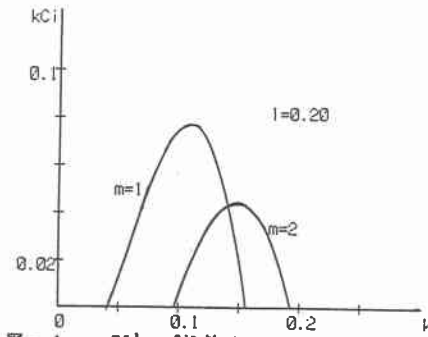


図-4 $m=1, m=2$ に於ける $(k-kCi)$ の関係

次に、 τ_{x0} 、 C_r そして、砂州の移動距離について考えを進める。まず、図-6のように無次元時間 T と τ_{x0} の関係を仮定する。すると、前述の通り、 C_r ある幅を持って現れる。 C_r が求めれば、それを積分することにより、砂州の移動距離がわかる。

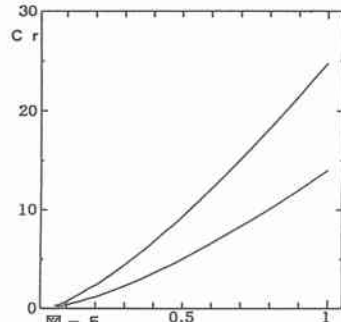


図-5 掃流力と流砂の移動速度 C_r の関係

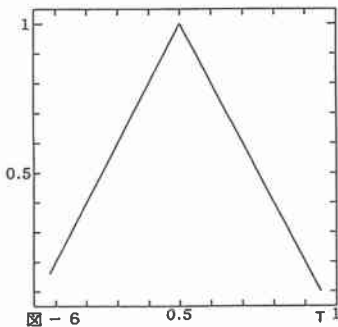


図-6 無次元時間 T と掃流力 C_r の関係

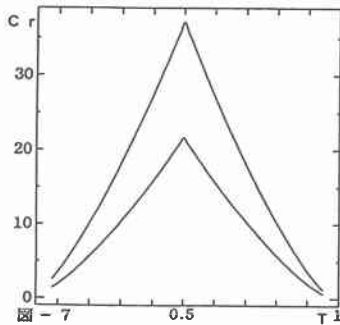


図-7 無次元時間 T と砂州の移動速度 C_r の関係

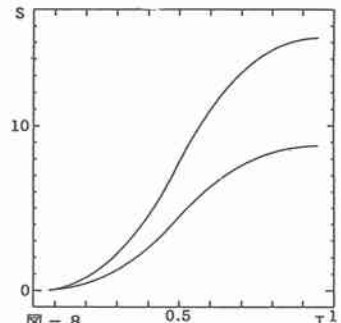


図-8 無次元時間 T と砂州の移動距離 S の関係

4. 今後の展開

今回は時間と掃流力の関係を単純なものに仮定した。今後は、実際の河川の資料を集め理論値と比較をし、その関係について検討する。

<参考文献>

- 1) 黒木幹男, 岸 力: 中規模河床形態の領域区分に関する研究
- 2) 吉川秀男: 流砂の水理学