II－40

三次元河床擾乱上の有限振幅波の研究

北海道大学工学部　学生員　土井寛史
北海道大学工学部　正　員　森明巨
北海道大学工学部　正　員　板倉忠興

1. はじめに

浅水流で最も大きな波高を持つ波は孤立波であり、その波高水深比a/hは最大でも0.8程度であるが、水路実験ではそれを大きく越えるa/h～1.2程度の波が観測された[1]。又、実際の河川においても、昭和58年8月の豊平川出水では大波高の三角波が観測された。可視化を中心とした流れの解析からこのような高波高の三角波の成因として、横断方向からの高速流の流入と河床擾乱の影響が考えられた。この考えを実証するためにレーザー流速計を用いて、流速3成分を測定してdataの解析を行ったが実験精度の限界から、流れの細部構造の解明までには至らなかった[2]。また、二次元河床波のみが存在する条件下では、この様な三角波は発生しないことがわかった[3]。そこで、本研究では横方向からの運動量の補給と三次元河床波擾乱が水面波形に与える効果を理論的に調べるために三次元的解析を行った。

解析方法としては、基本的にはE.V.Laitone[4]の孤立波理論を用いるが、この理論では、a/h＜1を前提にしているため、本研究が対象とするような高波高の波に対しては、水面での圧力が大気圧から大きくはずれて流速が異常な分布になってしまう。そこで、このような不都合を取り除くために本研究では、水面形に合わせた座標系を用いた。この方法では、水面において圧力は厳密に大気圧となり流向は水面に正確に沿ったものとなる。

2. 基礎方程式

基礎方程式は、運動方程式(3成分)、連続式、非回転の条件式(3成分)の7本でテンソルで表す(テンソル記号は慣用のものを用いる)。

運動方程式　$:V^jV^i{}_{,j}+\Gamma_{jk}{}^iV^jV^k=-g^{ij}p_{,j}$　(2-1)

連続式　$:\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}V^i\right)_{,i}=0$　(2-2)

非回転の条件　$:V_{i,j}=V_{j,i}$　(2-3)

ここに、$p=\tilde{p}/\rho+gz$、$\tilde{p}$：圧力、ρ：密度、g：重力の加速度、$\Gamma_{jk}{}^i$：クリストッフェル記号。x^iは水面に合わせた座標系で、i=1：流下方向、i=2：横断方向、i=3：鉛直上向き方向、河床を$x^3=0$、水面を$x^3=1$、水路左岸を$x^2=0$、右岸を$x^2=1$にとる。本研究は幅bの水路を前提とする。Cartecian座標系y^iとの関係は次式。

$$y^1=\lambda x^1,\ y^2=bx^2,\ y^3=hx^3+\eta \tag{2-4}$$

ここに、h：水深　λ：y^1方向の特性長、b：水路幅。以下では簡単のために　$x^1=x$、$x^2=y$、$x^3=z$　と書くことにする。

Friedrichsの浅水流理論に従いV^1、V^2、V^3、h、b、p、ηを以下のように無次元化する。

$$U=\frac{\lambda}{\sqrt{gd}}V^1、V=\frac{b\lambda}{\sqrt{gd}d}V^2、W=\frac{hd}{\sqrt{gd}\lambda}V^3、H=\frac{h}{d}、B=\frac{b}{d}、P=\frac{p}{gd}、N=\frac{\eta}{d} \tag{2-5}$$

d：代表水深。これらを用いると、x方向(t1)、y方向(t2)、z方向(t3)の運動方程式、連続式(t4)は次のようになる。x軸(t5)、y軸(t6)、z軸(t7)に関する非回転の条件は式が長いのでここでは省略する。

$$\mathrm{t1}\rightarrow WU_{,z}+\sigma\left(-\eta_{,x}P_{,z}-zH_{,x}P_{,z}+\frac{1}{\beta}HVU_{,y}+HP_{,x}+HUU_{,x}\right)=0$$

$$\mathrm{t2}\rightarrow \beta WV_{,z}+\sigma\left(-\eta_{,y}P_{,z}-zH_{,y}P_{,z}+HP_{,y}+\beta HUV_{,x}\right)+\sigma^2HVV_{,y}=0$$

Three dimensional analysis of finite amplitude wave on bed perturbations in open channel flow.
by Hiroshi Doi, Akio Mori and Tadaoki Itakura

$$t\,3 \rightarrow WW,_z + \sigma\left(\frac{1}{\beta}VWH,_y + UWH,_x + P,_z + \frac{1}{\beta}HVW,_y + HUW,_x\right) +$$

$$\sigma^2\left(\frac{2}{\beta}HUV\eta,_{xy} + \frac{2}{\beta}z\,HUVH,_{xy} + HU^2\eta,_{xx} + zHU^2H,_{xx} + \frac{1}{\beta^2}\eta,_y{}^2 P,_z + \right.$$

$$\frac{2}{\beta^2}z\eta,_y H,_y P,_z + \frac{1}{\beta^2}z^2H,_y{}^2 P,_z + \eta,_x{}^2 P,_z + 2z\eta,_x H,_x P,_z + z^2H,_x{}^2 P,_z -$$

$$\left.\frac{1}{\beta^2}H\eta,_y P,_y - \frac{1}{\beta^2}zHH,_y P,_y - H\eta,_x P,_x - zHH,_x P,_x\right) +$$

$$\sigma^3\left(\frac{1}{\beta^2}HV^2\eta,_{yy} + \frac{1}{\beta^2}zHV^2H,_{yy}\right) = 0$$

$$t\,4 \rightarrow \sigma^{-1}W,_z + \sigma\left\{(HU),_x + \frac{1}{\beta}(HV),_y\right\} = 0$$

ここに、$\beta = b/\lambda$ でありβはσ^0のオーダーとする。
水面と河床と両岸の境界条件は以下のようになる。

W = 0	at	z = 0 and 1
H = constant	at	$\lvert x\rvert \Rightarrow \infty$
P = H+N	at	z = 1
V = 0	at	y = 0 and 1

$\sigma = \left(\dfrac{d}{\lambda}\right)^2$ は摂動のパラメータで、σが小さいほど浅水流の度合いが強いと考える。

H,U,V,W,P,N を以下のようにσで展開する。

$H = H_0 + \sigma H_1 + \sigma^2 H_2 + \sigma^3 H_3 + \cdots\cdots$、　$U = U_0 + \sigma U_1 + \sigma^2 U_2 + \sigma^3 U_3 + \cdots\cdots$、
$V = V_0 + \sigma V_1 + \sigma^2 V_2 + \sigma^3 V_3 \cdots\cdots$、　$W = W_0 + \sigma W_1 + \sigma^2 W_2 + \sigma^3 W_3 + \cdots\cdots$、
$P = P_0 + \sigma P_1 + \sigma^2 P_2 + \sigma^3 P_3 + \cdots\cdots$、　$N = \sigma^2 N_2$　(2-6)

斜流の場合は、河床波の波高が小さいことから、Nは2次のオーダーとした。
連続式をz=1～zで積分し$W(1) = 0$を使うと

$$W_{i+1}(z) = -\left[\int_1^z Q_i,_x\, dz + \frac{1}{\beta}\int_1^z \sum_{j=0}^{i}\left(H_{i-j}V_j\right),_y\right] \tag{3-1}$$

$$Q_i = \sum_{j=0}^{i} H_j U_{i-j} \tag{3-2}$$

式(3-1)から右辺がzに依存しない場合には$W_{i+1} = 0$となる。この関係を用いると $W_0 = 0$、$W_1 = 0$、$W_2 = 0$ が得られる。
σの0次のオーダーは以下のようになる。t 1～t 7より、

t 1 → $H_0P_0,_x + H_0U_0,_x U_0 = 0$　(3-3)、t 2 → $H_0P_0,_y = 0$　(3-4)
t 3 → $P_0,_z = 0$　(3-5)、t 4 → $H_0U_0,_x + W_1,_z + H_0,_x U_0 = 0$　(3-6)
t 5 → $U_0,_z = 0$　(3-7)、t 6 → $V_0,_y = 0$　(3-8)
t 7 → $U_0,_y = 0$　(3-9)

(3-4)、(3-5)、(3-7)、(3-9)から、

$$P_0 = P_0(x)、U_0 = U_0(x) \tag{3-10}$$

(3-8)より　$V_0 = 0$　(3-11)

Pに関する境界条件から、　$P_0 = H_0(x)$　(3-12)

(3-3)から、
$$E_0=\frac{U_0{}^2}{2}+H_0=\text{constant} \quad (3\text{-}13)$$
が得られる。$W_1=0$、また$V_0=0$であるから(3-1)から
$$Q_0=H_0U_0=\text{constant} \quad (3\text{-}14)$$
が得られる。(3-13)、(3-14)の関係を満たすU_0、H_0 は
$$U_0=\text{constant}、H_0=\text{constant} \quad (3\text{-}16)$$

σの1次のオーダーは以下のようになる。t 1～t 7より、

t 1 → $H_0P_{1,x}+H_0U_{1,x}U_0=0$ (3-17)、 t 2 → $H_0P_{1,y}+\beta H_0V_{1,x}U_0=0$ (3-18)

t 3 → $P_{1,z}=0$ (3-19)、

t 4 → $\beta H_0U_{1,x}+H_0V_{1,y}+\beta W_{2,z}+\beta H_{1,x}U_0=0$ (3-20) t 5 → $U_{1,z}=0$ (3-21)、

t 6 → $V_{1,z}=0$ (3-22) t 7 → $-U_{1,y}+\beta V_{1,x}=0$ (3-23)

(3-18)、(3-20)、(3-21)から、 $P_1=P_1(x,y)$、$U_1=U_1(x,y)$、$V_1=V_1(x,y)$ (3-24)

(3-22)と(3-17)から $(P_1+U_1U_0)_{,y}=0$ (3-25)

これと(3-16)から $E_1=P_1+U_1U_0=\text{constant}$ (3-26)

(3-19)をz=0~1で積分すると $\beta(H_0U_1+H_1U_0)_{,x}+H_0V_{1,y}=0$ (3-27)

(3-22)と(3-26)よりUを消去すると $\beta^2(H_0V_1+H_1U_0)_{,xx}+H_0V_{1,yy}=0$ (3-28)

これに(3-25)を代入すると(3-27)は次のようになる。
$$V_{1,xx}-a^2V_{1,yy}=0 \quad (3\text{-}29)$$
$F>1$のとき$a^2>0$で、2階の波動方程式となる。
U_1、H_1についても同形の方程式が得られる。
以上の低次解では、P_0、P_1 は静水圧、U_0、U_1 は深さ方向に一様で浅水流近似になっている。

4、高次近似

2次では以下で示すように、Pは深さ方向に分布を持ち浅水流近似は成立しない。

t 1 → $H_1P_{1,x}+H_0P_{2,x}+H_1U_{1,x}U_0+H_0U_{2,x}U_0+H_0U_{1,x}+\frac{1}{\beta}H_0U_{1,y}V_1=0$ (4-1)

t 2 → $H_1P_{1,y}+H_0P_{2,y}+\beta H_1V_{1,x}U_0+\beta H_0V_{2,x}U_0+\beta H_0V_{1,x}U_1=0$ (4-2)

t 3 → $P_{2,z}-zH_0H_{1,xx}U_0{}^2=0$ (4-3)

t 4 → $\beta H_1U_{1,x}+\beta H_0U_{2,x}+H_1V_{1,y}+H_0V_{2,y}+\beta W_{3,z}+\beta H_{2,x}U_0+\beta H_{1,x}U_1+H_{1,y}V_1=0$ (4-4)

t 5 → $U_{2,z}-zH_0H_{1,xx}U_0=0$ (4-5)

t 6 → $\beta V_{2,z}-zH_0H_{1,xy}U_0=0$ (4-6)

t 7 → $-U_{2,y}+\beta V_{2,x}=0$ (4-7)

(4-3)、(4-5)、(4-6)をz=1～zで積分すると

(4-3)から、 $P_2+\frac{z^2-1}{2}H_0H_{1,xx}U_0{}^2=N_2+H_2$ (4-8)

(4-5)から、 $U_2-\frac{z^2-1}{2}H_0H_{1,xx}U_0=U_{2S}$ (4-9)

(4-6)から、 $V_2-\frac{z^2-1}{2}\frac{1}{\beta}H_0H_{1,xy}U_0=V_{2S}$ (4-10)

(4-7)と(4-2)より、 $H_0(P_2+U_2U_0)_{,y}+H_1(P_1+U_1U_0)_{,y}+H_0U_{1,y}U_1=0$ (4-11)

これをyで積分して、$P_2+U_2U_0+\frac{U_1^2}{2}=f(x)$ (4-12)

(4-1)より、 $H_0(P_2+U_2U_0)_{,x}+H_1(P_1+U_1U_0)_{,x}+H_0U_{1,x}U_1=0$ (4-13)

これをxで積分して、$E_2 = P_2 + U_2 U_0 + \frac{U_1^2}{2} = \text{constant}$ (4-14)

(4-4)のU_2、V_2に(4-9)、(4-10)を代入して z=0~1で積分すると、

$$\beta H_0 U_{2S},_x + H_0 V_{2S},_y + \beta U_0 H_2,_x + \beta\left(H_1 U_1\right),_x + \left(H_1 V_1\right),_y - \frac{1}{3} H_0{}^2 U_0 \left(\beta H_1,_{xxx} + \frac{1}{\beta} H_1,_{xyy}\right) = 0 \tag{4-15}$$

上式から(4-7)を使ってU_{2S}を消去すると

$$\beta H_0 V_{2S},_{xx} + \beta U_0 H_2,_{xy} + \frac{1}{\beta} H_0 V_{2S},_{yy} + \beta\left(H_1 U_1\right),_{xy} + \left(H_1 V_1\right),_{yy} - \frac{1}{3} H_0{}^2 U_0 \left(\beta H_1,_{xxxy} + \frac{1}{\beta} H_1,_{xyyy}\right) = 0 \tag{4-16}$$

更に(7-1)と(7-7)を使ってH_2を消去すると

$$V_{2S},_{xx} - a^2 V_{2S},_{yy} = a^2 \left[-\beta \frac{U_0}{H_0} N_2,_{xy} - \beta \frac{U_0}{H_0} \left(\frac{U_1^2}{2}\right),_{xy} + \beta \frac{1}{H_0}\left(H_1 U_1\right),_{xy} + \frac{1}{H_0}\left(H_1 V_1\right),_{yy} - \frac{1}{3} U_0{}^2 H_1,_{xxxy} \right] \tag{4-17}$$

5. 1次のオーダーの解

変数分離型の解を考え、これを二重フーリエ級数で表す。境界条件よりy=0, 1でV=0となる。従って、解は次式で表される。

$$V_i = \sum \alpha_i \sin(j\pi y) e^{ikx} \tag{5-1}$$

(3-28)に代入すると、 $k = \pm j \pi a$ (5-4)

が得られる。(4-17)を(4-15)へ代入すると

$$V_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sin(j\pi y) \cos(j\pi a x + \delta) \tag{5-5}$$

が得られる。U_1、P_1、H_1は次のように求められる。

$$U_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \beta \sin(l\pi a x + \delta) \cos(\pi y) \tag{5-6}$$

$$P_1 = H_1 = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \beta a U_0 \sin(m\pi a x + \delta) \cos(\pi y) \tag{5-7}$$

,2次のオーダーの解は

(4-17)の右辺に(5-5)、(5-6)、(5-7)を代入すると

$$\begin{aligned} V_{2S},_{xx} - a^2 V_{2S},_{yy} = \pi^2 a^2 \beta \frac{U_0}{H_0} \Big[\Big(\frac{1}{4}\alpha_n \alpha_j \beta^2 a - \frac{1}{8} \alpha_l \alpha_m \beta^2 \Big) \Big[(l+m) a \sin\{(l+m)\pi a x + 2\delta\} - \\ (l-m) a \sin(l-m)\pi y \Big] \Big[-(l+m)\sin(l+m)\pi y - (l-m)\sin(l-m)\pi y \Big] + \\ \frac{1}{4}\alpha_k \alpha_s a \Big[\sin\{(l+m)\pi a x + 2\delta\} + \sin(l-m)\pi a x \Big] \Big[-(l+m)^2 \sin(l+m)\pi y + \\ (l-m)^2 \sin(l-m)\pi y \Big] - \frac{1}{3}\pi^2 a \beta H_0 U_0^3 l^4 \cos(l\pi x + \delta) \sin(l\pi y) \Big] \end{aligned} \tag{5-9}$$

が得られる。よって、V_2は(5-9)を満たさなければならない。

この研究では孤立波解は得られなかったがβの値によっては孤立波解が得られる可能性がある。

参考文献

1)森明巨、板倉忠興、森平浩治、高田修二：跳水と境界層の相互干渉-三次元波状跳水 ；水工学論文集、第36巻、1992年
2)Akio Mori,Tadaoki Itakura:Interaction Between Hydraulic Jump and Turbulent Boundary Layer; 8th congress of Asia and Pacific regional division of the international association research,1992
3)平井誠、森明巨、板倉忠興：波状底面上の有限振幅流に関する理論的研究；1995年
4)E.V.Laitone: The second approximation to cnoidal and solitary waves, J.Fluid Mech., vol. 9, 1961.