

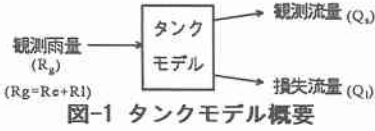
II-22

タンクモデルを用いた損失流出量の解析

北海道大学 学生員 平山 大輔  
 北海道大学 正員 藤田 睦博  
 北海学園大学 正員 嵯峨 浩

1. はじめに

数多くの流出モデルが提案されているなかで、タンクモデル法は損失機構を内蔵したモデルである。図-1に示すように、実測降雨量 $R_g$ と河川流出量 $Q_s$ を与えると、モデルパラメータと損失流出量 $Q_l$ が得られる。



ここで損失流出量とは、損失雨量に相当する流出量成分として

定義している。短期流出では、観測雨量の大部分が損失雨量となっている場合も珍しくなく、妥当な $Q_l$ を推定しているからこそ $Q_s$ の再現計算が良好であると考えられることができる。本論文では、タンクモデルのこの性質を用いて降雨量の有効成分を各時刻ごとに求めた。さらに、竹内<sup>1)</sup>、藤田<sup>2)</sup>らが用いたエントロピー法により損失雨量を推定し、その結果との比較、検討を行った。パラメータにより決定づけられるフレームを持つタンクモデルに対し、エントロピー法は、エントロピー最大の原理を満たすように流出量を計算するため、原理的には全く異なる2つの手法を用いていることになる。

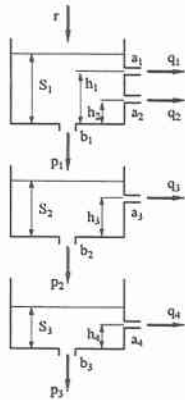


図-2 タンクモデル

2. タンクモデルの計算と有効雨量の算定

本研究では、図-2に示すタンクモデルを用いた。短期流出を対象とするため3段目のタンクに下方への流出孔を設けた。タンクモデルの連続式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= r - p_1 - q_1 - q_2 \\ \frac{dS_2}{dt} &= p_1 - p_2 - q_3 \\ \frac{dS_3}{dt} &= p_2 - p_3 - q_4 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} p_1 &= b_1 S_1 \\ p_2 &= b_2 S_2 \\ p_3 &= b_3 S_3 \\ q_1 &= Hev(S_1, h_1) a_1 (S_1 - h_1) \\ q_2 &= Hev(S_1, h_2) a_2 (S_1 - h_2) \\ q_3 &= Hev(S_2, h_3) a_3 (S_2 - h_3) \\ q_4 &= Hev(S_3, h_4) a_4 (S_3 - h_4) \end{aligned} \quad (2)$$

$$Hev(S, h) = \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \frac{S-h}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \right\} \quad (3)$$

$(\epsilon = 10^{-6})$

(3)式は、Heaviside 関数である。

まず、一段目のタンクについて考えてみる。

(2)式より、

$$S_1 = \frac{p_1}{b_1} \quad (4)$$

(4)式を用いて、改めて連続式を書き直すと、

$$\frac{1}{b_1} \frac{dp_1}{dt} = r - p_1 - q_1 - q_2 \quad (5)$$

ここに、

$$\begin{aligned} q_1 &= Hev \left( \frac{p_1}{b_1}, h_1 \right) a_1 \left( \frac{p_1}{b_1} - h_1 \right) \\ q_2 &= Hev \left( \frac{p_1}{b_1}, h_2 \right) a_2 \left( \frac{p_1}{b_1} - h_2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式を(5)式に代入して整理することにより、(7)式が得られる。

$$\frac{dp_1}{dt} = -c_1(t)p_1 + c_2(t) \quad (7)$$

ここに、

$$c_1(t) = Hev \left( \frac{P_1}{b_1}, h_1 \right) a_1 + Hev \left( \frac{P_1}{b_1}, h_2 \right) a_2 + b_1 \quad (8)$$

$$c_2(t) = b_1 \left\{ r(t) + Hev \left( \frac{P_1}{b_1}, h_1 \right) a_1 h_1 + Hev \left( \frac{P_1}{b_1}, h_2 \right) a_2 h_2 \right\}$$

(7)式を解くにあたり、次式を定義する。

$$\phi_1(t) = e^{-\int_0^t c_1(\tau) d\tau} \quad (9)$$

(9)式を用いると、時刻 $t$ における一段目タンクからの下方浸透量 $p_1(t)$ は、次式で表される。

$$p_1(t) = \frac{1}{\phi_1(t)} \int_0^t \phi_1(\tau) c_2(\tau) d\tau \quad (10)$$

ここで、

$$pp_1(\tau) = \phi_1(\tau) c_2(\tau) \quad (11)$$

と置くと、(10)式は、

$$p_1(t) = \frac{1}{\phi_1(t)} \int_0^t pp_1(\tau) d\tau \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\phi_1(t)} \left\{ \int_0^1 pp_1(\tau) d\tau + \dots + \int_{t-1}^t pp_1(\tau) d\tau \right\}$$

(12)式を用いることにより、時刻 $t$ における下方浸透流の、時刻 $i$ の降雨による成分 $p_1(t, i)$ を求めることができる。

$$p_1(t, i) = \frac{1}{\phi_1(t)} \int_{t-i}^t pp_1(\tau) d\tau \quad (13)$$

また、タンク側方からの流出量については、タンクの底から順に先の時刻の降雨が貯留していき、その貯留高が流出孔の高さに達した時刻の降雨から表面流出として流れ出すものとした。

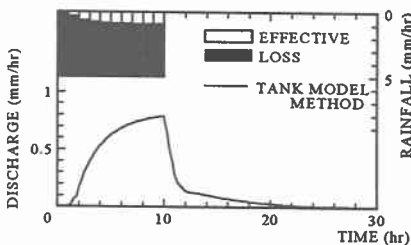


図-3 矩形降雨による流出

図-3は、矩形降雨(5mm/hr,10時間)を与えたときの表面流出量と有効雨量を調べたものである。

### 3. 実測データを用いた計算

前述の手法を用いて実流域の洪水流出について検討を行った。対象流域として、定山溪ダム、桂沢ダム、金山ダムの3つのダム流域を取り上げた。各ダム流域において過去の洪水データを用いてタンクのパラメータを同定し、表面流出の成分となる有効雨量を本手法により求めた。図-4、5、6に結果を示す。流域や降雨形態により損失雨量の様子は異なるが、降雨前半は損失が多く、降雨継続時間とともに損失雨量が少なくなる傾向がみられる。

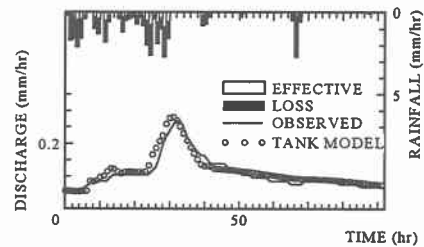


図-4 定山溪ダム (9/29-10/3 '93)

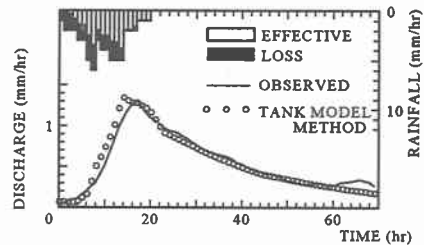


図-5 桂沢ダム (9/19-9/22 '94)

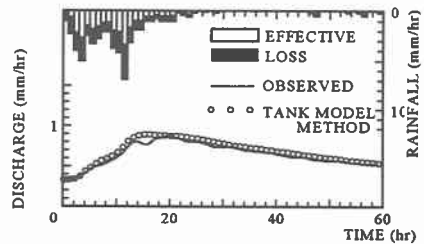


図-6 金山ダム (9/20-9/22 '94)

#### 4. エントロピー法による計算結果との比較

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^{n+1} c_{i,j} t_{i,j} = C \quad (19)$$

表-1 降雨の配分

	$R_1$	$R_2$	...	$R_m$
$Q_1$	$t_{1,1}$			
$Q_2$	$t_{1,2}$	$t_{2,2}$		
...	..	..		
$Q_m$	$t_{1,m}$	$t_{2,m}$	...	$t_{m,m}$
...	..	..		..
$Q_n$	$t_{1,n}$	$t_{2,n}$	...	$t_{m,n}$
$Q_{n+1}$	$t_{1,n+1}$	$t_{2,n+1}$	...	$t_{m,n+1}$

表-1に示すように、 $m$ 時間の降雨 $R_i$ により $n$ 時間分の流量データ $Q_j$ が入手されたとする。このうち、 $j$ 時刻に流出する降雨のうち、時刻 $i$ の降雨による雨粒の個数を $t_{i,j}$ とすると、

$$\sum_{j=i}^{n+1} t_{i,j} = R_i \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^j t_{i,j} = Q_j \quad (j \leq m) \quad , \quad \sum_{i=1}^m t_{i,j} = Q_j \quad (j > m)$$

ここで、 $\sum_{i=1}^m t_{i,n+j}$ を便宜的に損失雨量とすると、

$$\sum_{i=1}^m R_i - \sum_{j=1}^n Q_j = \sum_{i=1}^m t_{i,n+j} \quad (15)$$

このとき、すべての雨滴を $t_{i,j}$ に振り分ける組み合わせの数  $w(t_{i,j})$  は、重複順列により、

$$w(t_{i,j}) = \prod_{i=1}^m \frac{R_i!}{n+1} \prod_{j=1}^n \frac{t_{i,j}!}{t_{i,j}!} \quad (16)$$

(16)式において、スターリングの公式を用いて、両辺の対数をとると次式のような形になる。

$$\ln W(t_{i,j}) = \text{const} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} t_{i,j} \ln t_{i,j} \quad (17)$$

従って、エントロピー最大となるとき、(17)式は最大値をとるので、

$$\max \{ W(t_{i,j}) \} = \max \left\{ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} t_{i,j} \ln t_{i,j} \right\} \quad (18)$$

ここで、エネルギーに関する次式を定義する。

(19)式において、 $c_{i,j}$ は、雨滴が時刻 $i$ に落ちてきてから時刻 $j$ に流出するまでになす仕事であり、 $C$ は洪水を通しての全仕事量である。

(18)式において、(14)、(15)、(19)式の制約条件を加えて、Lagrangeの未定係数を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、結局 $t_{i,j}$ は次式で求めることができる。

$$t_{i,j} = A_i B_j R_i Q_j d_{i,j} \quad (20)$$

ここに、

$$A_i = \frac{e^{-\alpha_i}}{R_i} \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$B_j = \frac{e^{-\beta_j}}{Q_j} \quad (i \leq j \leq n+1) \quad (21)$$

$$d_{i,j} = e^{-\gamma c_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq m, i \leq j \leq n+1)$$

(21)式中の $c_{i,j}$ の関数は、次式に示す関数を用いた。また $\gamma$ の値は、 $\gamma=2.3$ を用いた。

$$c_{i,j} = \ln(j-i+1) \quad (j \geq i) \quad (22)$$

以上より $t_{i,j}$ は、(21)式において $A_i, B_j$ を繰り返し計算で求め、その値を用いて(20)式より求めることができる。実際に前述のダム流域のデータについてエントロピー法を用いて計算を行った結果が、図-7,8,9である。

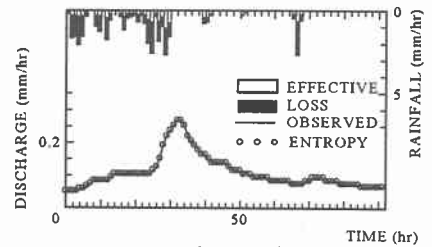


図-7 定山溪ダム

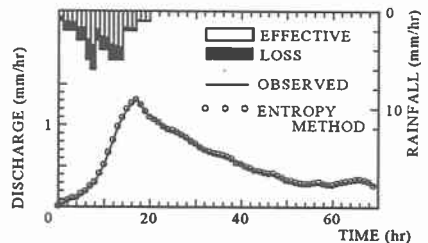


図-8 桂沢ダム

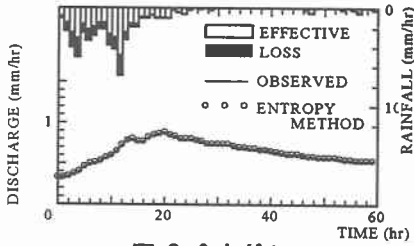


図-9 金山ダム

### 5. 有効雨量の検討

図-10, 11, 12は、前述の2つの手法で求めた各ダム流域での有効雨量を示している。上側がタンクモデルを用いた場合、下側がエントロピー法を用いた場合である。2つの手法により得られた有効雨量の波形はほぼ一致していることがわかる。

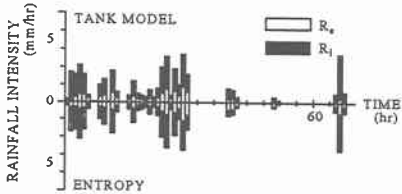


図-10 定山溪ダム雨量比較

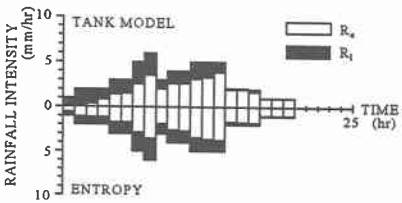


図-11 桂沢ダム雨量比較

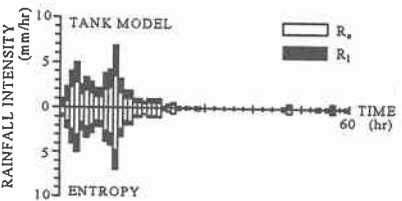


図-12 金山ダム雨量比較

図-11にみられるように、初期の降雨に対して、タンクモデルを用いた場合にはほとんど有効雨量は得られないが、エントロピー法を用いた場合には、若干の有効雨量が得られている。これは、エントロピー法が統計的手法であり、連続式を満たすように降雨を各流出成分に振り分けるためと考えら

れる。図-13は、タンクモデル手法により得られた有効雨量と表面流出量を用いて $S-Q$ 曲線を描いたものである。ハイドログラフの上昇期について $S-Q$ 曲線の傾きを求めると、貯留係数 $P$ の値は、0.6~0.7であり、一般的に言われている $P=0.6$ に近い値が得られた。

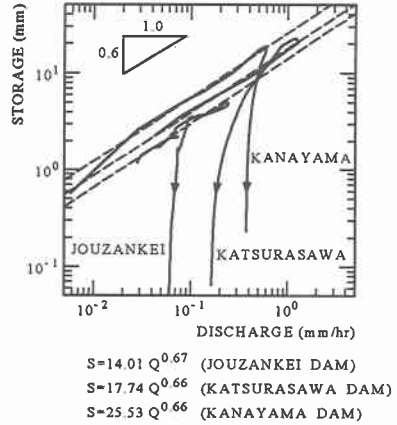


図-13  $S-Q$  曲線

### 6. まとめ

本研究では、タンクモデル法とエントロピー法という性質の全く異なる手法を用いて有効雨量を求めた。タンクモデル法では、流出量に応じて各タンクに初期貯留量を与えて計算を行うのに対し、エントロピー法は初期条件がなく、連続式のみを満たすように流出量を計算する。その結果として双方から同じような波形の有効雨量が得られたということは、非常に興味深いことである。従来、貯留関数法などの有効雨量を入力とする流出モデルでは、有効雨量の算定が大きな問題であったが、本手法により有効雨量を求めることで、再現計算の精度が向上するものと考えられる。また、今後は、タンクモデル法により計算される下方浸透量を、不飽和浸透計算の下端境界条件に適用して、不飽和浸透計算を行うことを考えている。

### 7. 参考文献

- 1) Kuniyoshi Takeuchi ; The Law of Entropy Increase Governing Rainfall-Runoff Process , the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics , 1980
- 2) 藤田睦博, 道口敏幸 ; エントロピー法を用いた流出解析 , 土木学会北海道支部論文報告集, 第40号, 1984