

I-78

撓度理論による吊橋のねじり振動解析

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎
 北海道大学工学部 学生員 村 澤 直 樹
 北海道大学工学部 正員 佐 藤 浩 一

1. まえがき

吊橋は長大支間橋梁構造物として、最も適した橋梁形式である。しかし、吊橋は他の橋梁形式に比べて比較的剛性が低いため、振動対策が必要とされる。そこで、風荷重、地震荷重および列車走行荷重などの動的外力に対して、その安全性を検討することは重要であり、その最も基本となる吊橋の固有振動数の値を求めることは必須である。従来の吊橋のねじり振動解析法には、いわゆる撓度理論に基づく古典的振動解析がある。この理論では、図-1(a)に示すような変形状態を考え、その位置での釣り合い条件から支配方程式を誘導している。このような変形状態では暗黙のうちに、補剛桁の回転中心とハンガ一定着点との鉛直距離が十分小さいという仮定がなされている。したがって、ハンガ一定着点の水平方向移動は無視でき、ハンガ一定張力における桁自重が回転中心まわりにつくる復元モーメントは0となる。つまり、重力剛性はこの場合存在しない。ここでいう重力剛性とは、吊橋の補剛桁が重心位置で吊られていないことによりもたらされる、桁ねじり変位に対する桁自重の復元力を意味する。しかし、図-2(a)に示すように、ハンガ一定着位置と回転中心位置が一般には異なるため、重力剛性が関与してくるものと考えられる。

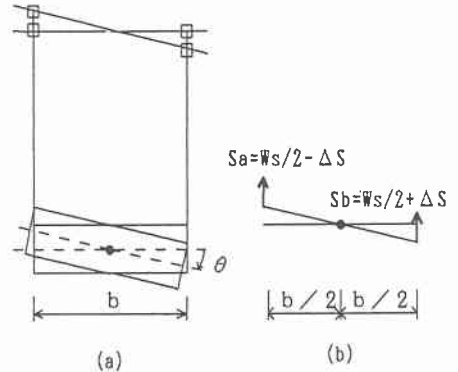


図-1 古典的な吊橋のねじり振動

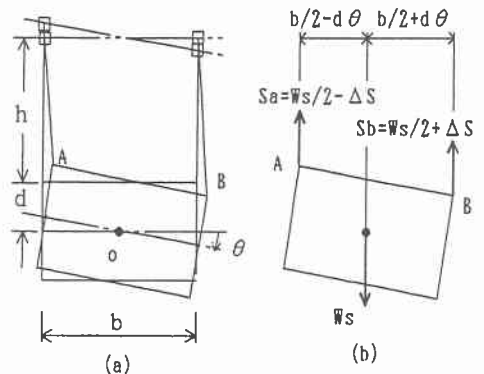


図-2 重力剛性を考慮した吊橋のねじり振動

本研究は、簡易的な撓度理論に基づくねじり振動解析を行い、固有周期に与える重力剛性の影響について検討する。また、補剛桁の支持条件、塔頂におけるケーブルの結合状態の違いによる影響について、数値計算により比較検討を行う。

2. ねじり振動解析

2-1. 基礎微分方程式

撓度理論による吊橋のねじり振動に関する基礎微分方程式は、式(1)のように与えられる^{1), 2)}。ここで、式(1)の第5項の下線部分は重力剛性に関するものである。また、簡単のため、本研究ではハンガ一定傾斜角を無視した近似理論を用い、吊橋のねじり中心が補剛桁のねじり中心と一致すると仮定する。

Torsional Vibration Analysis of Suspension Bridges Based on Deflection Theory

by Toshiro HAYASHIKAWA, Naoki MURASAWA and Koichi SATO

$$EI_{wi} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \left(GJ_i + H_w \frac{b_i^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + H_{pi} \frac{W_i b_i}{H_w} + I_{mi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{W_{si} d_i \theta_i}{g} = 0 \quad (1)$$

ここで、 EI_{wi} : 曲げねじり剛性、 GJ_i : ねじり剛性、 θ : ねじり角、 H_w : 死荷重による水平張力、 H_{pi} : 活荷重および振動による付加水平張力、 b_i : 幅員、 d_i : ハンガー取付点と重心との鉛直距離、 W_{si} : 補剛桁の単位長さ当たりの重量、 W_{ci} : ケーブルの単位長さ当たりの重量、 I_{pi} : 極慣性モーメント、 i : 添字 i は第 i 径間の断面諸元。ただし、 $W_i = W_{si} + W_{ci}$ 、 $I_{mi} = I_{pi} + \frac{W_{ci} b_i^2}{g}$ 、 g : 重力加速度。

2-2. ケーブルの方程式

式(1)で表される基礎微分方程式の中で、もう1つの未知量である付加水平張力 H_{pi} とねじり関数 θ とはケーブルの方程式によって関係づけられる。図-3には塔頂においてケーブルの滑動を許すローラー結合とケーブルが塔頂で固定されているヒンジ結合が示されている。このようなケーブルの結合状態の差異はケーブルの方程式によって処理される。

まず、図-3(a)のローラー結合の場合についてみると、塔の変形はなく、水平付加荷重 H_p は全径間を通して一定であるため、ケーブルの方程式は次式のように与えられる。

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_p - \sum_{i=1}^n \frac{W_i b_i}{2H_w} \int_0^{L_i} \theta dx_i = 0 \quad (2)$$

ここで、 L_c : ケーブルの水平投影長、 E_c : ケーブルの弾性係数、 A_c : ケーブルの断面積。

次に、図-3(b)、(c)のヒンジ結合の場合には、塔の左右のケーブルの慣性力による付加水平張力の不均衡から生じる水平力の差が、塔を片持梁のように曲げ変形させ、そのために塔頂に水平変位が生ずるものと考えられる。よって、ヒンジ結合の場合におけるケーブルの方程式は次のように与えられる。

$$\frac{L_{ci}}{E_c A_c} H_{pi} - \frac{W_i b_i}{2H_w} \int_0^{L_i} \theta dx_i = -\delta_i^l + \delta_i^r \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

ここで、 δ_i^l, δ_i^r : 第 i 径間の左右の塔頂における水平変位。図-3(b)のヒンジ結合の塔頂における水平変位 δ_i^l, δ_i^r は次のようになる。

$$\delta_i^l = -\frac{L_{t,i-1}^3}{3E_t I_{t,i-1}} (H_{p,i-1} - H_{p,i}) \quad \delta_i^r = -\frac{L_{t,i}^3}{3E_t I_{t,i}} (H_{p,i} - H_{p,i+1}) \quad (4ab)$$

ここで、 $E_t I_{t,i}$: 塔の平均化された曲げ剛性、 $L_{t,i}$: 塔の高さ。さらに、図-3(c)に示すようなヒンジ結合の場合には、ケーブルからの鉛直反力 N が塔頂に作用することによって水平変位 δ_i^l と δ_i^r はそれぞれ次のよ

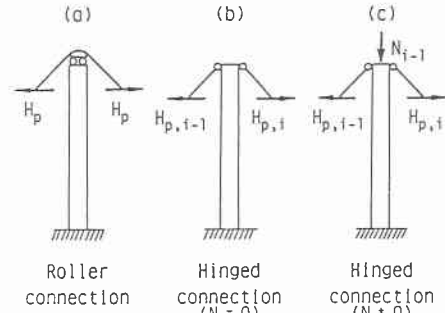


図-3 塔頂とケーブルの結合状態

うに求められる。

$$\delta_i^l = -\frac{L_{t,i-1}}{N_{i-1}} \left[\frac{\tan(K_{i-1}L_{t,i-1})}{K_{i-1}L_{t,i-1}} \right] (H_{p,i-1} - H_{p,i}) \quad \delta_i^r = -\frac{L_{t,i}}{N_i} \left[\frac{\tan(K_i L_{t,i})}{K_i L_{t,i}} \right] (H_{p,i} - H_{p,i+1}) \quad (5ab)$$

ここで、 $K_i = \sqrt{\frac{N_i}{E_t I_{t,i}}}$ 、 $N_i = \frac{W_i L_i + W_{i+1} L_{i+1}}{2}$ 、 L_i : 補剛桁の支間長。

2-3. 固有関数

式(1)の一般解を求めるために、吊橋のねじり固有円振動数を ω として、解を式(6ab)のように変数分離した形で仮定すると、特性方程式は式(7)のように得られる。

$$\theta_i = \theta_i(x_i, t) = \bar{\theta}_i(x_i) \cdot \exp(j\omega t)、\quad H_{p,i} = \bar{H}_{p,i} \cdot \exp(j\omega t) \quad (6ab)$$

ここで、 $\bar{\theta}_i(x_i) = \exp(\lambda x_i / L_i)$ 、 j は虚数である。

$$E_t I_{w,i} \left(\frac{\lambda}{L_i} \right)^4 - \left(G_i J_i + H_w \frac{b_i^2}{2} \right) \left(\frac{\lambda}{L_i} \right)^2 + \bar{H}_{p,i} \frac{W_i b_i}{H_w} - (I_{m,i} \omega^2 - W_{s,i} d_i) \bar{\theta}_i = 0 \quad (7)$$

まず、式(7)の特解は次のように求められる。

$$\bar{\theta}_{i1} = \frac{W_i b_i}{H_w (I_{m,i} \omega^2 - W_{s,i} d_i)} \bar{H}_{p,i} \quad (8)$$

また、式(7)の特性方程式の解は次のようになる。

$$\left(\frac{\lambda}{L_i} \right)^2 = \frac{2G_i J_i + H_w b_i^2}{4E_t I_{w,i}} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16E_t I_{w,i} (I_{m,i} \omega^2 - W_{s,i} d_i)}{(2G_i J_i + H_w b_i^2)^2}} \right\} \quad (9)$$

$$\text{ここで、} \quad Z_i = \sqrt{1 + \frac{16E_t I_{w,i} (I_{m,i} \omega^2 - W_{s,i} d_i)}{(2G_i J_i + H_w b_i^2)^2}} \quad (10)$$

とおくと、 $Z_i > 1$ であるから、変数 μ_i と ν_i を次のように定義すると、

$$\mu_i = L_i \sqrt{\frac{2G_i J_i + H_w b_i^2}{4E_t I_{m,i}} (Z_i - 1)} \quad \nu_i = L_i \sqrt{\frac{2G_i J_i + H_w b_i^2}{4E_t I_{m,i}} (Z_i + 1)} \quad (11ab)$$

従って、一般解は次のように求められる。

$$\bar{\theta}_i = A_i \cos \mu_i \frac{x_i}{L_i} + B_i \sin \mu_i \frac{x_i}{L_i} + C_i \cosh \nu_i \frac{x_i}{L_i} + D_i \sinh \nu_i \frac{x_i}{L_i} + \frac{W_i b_i}{H_w (I_{m,i} \omega^2 - W_{s,i} d_i)} \bar{H}_{p,i} \quad (12)$$

ここで、 A_i, B_i, C_i, D_i は積分定数である。

2-4. 振動数方程式

式(12)で表される一般解に含まれる未知の積分定数は、図-4に示すような多径間吊橋の補剛桁の境界条件によって決定される。また、残るもう1つの未知変数 H_{pi} はケーブルの方程式に一般解を代入することにより決められる。ここで、 $M_{w,i}$ を多径間吊橋の第 i 径間における曲げねじりモーメントであるとすると、図-4に示される多径間吊橋における補剛桁の境界条件はそれぞれ次のようになる。

左端支持点: $\bar{\theta}_i(0) = 0, M_{w,i}(0) = 0$

中間支持点:

- ・単純支持 $\bar{\theta}_{i-1}(L_{i-1}) = 0, M_{w,j-1}(L_{i-1}) = 0,$
 $\bar{\theta}_i(0) = 0, M_{w,i}(0) = 0,$
- ・連続支持: $\bar{\theta}_{i-1}(L_{i-1}) = 0, \bar{\theta}'_{i-1}(L_{i-1}) = \bar{\theta}'_i(0),$
 $\bar{\theta}_i(0) = 0, M_{w,j-1}(L_{i-1}) = M_{w,j}(0),$

右端支持点: $\bar{\theta}_n(L_n) = 0, M_{w,n}(L_n) = 0$

ここで、 $(\prime) = d/dx_i$ 。式(12)をこれらの境界条件式に代入することにより、次のマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{h} \quad (13)$$

ここで、ベクトル \mathbf{a} および \mathbf{h} は、 $\mathbf{a} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n\}^T$, $\mathbf{h} = \{\bar{H}_{p1}, \bar{H}_{p2}, \dots, \bar{H}_{pn}\}^T$ である。係数マトリックス \mathbf{A} および \mathbf{H} はそれぞれ $4n \times 4n$ および $4n \times n$ の行列の大きさである。さらに、式(2)あるいは式(3)のケーブルの方程式に、式(12)を代入すると次のマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \quad (14)$$

ここで、係数マトリックス \mathbf{G} および \mathbf{E} はそれぞれ $n \times 4n$ および $n \times n$ の行列の大きさである。そこで、式(13)と式(14)よりベクトル \mathbf{h} を消去すると、ベクトル \mathbf{a} に関する同次方程式が次のように得られる。

$$\{\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}\} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (15)$$

ここで、Cramerの法則から次のように吊橋のねじり振動に関する振動数方程式が得られる。

$$\det|\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}| = 0 \quad (16)$$

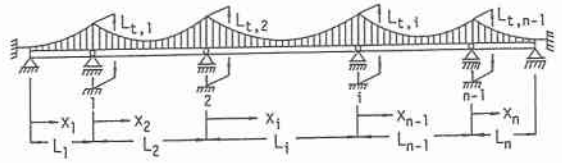
上式は固有円振動数を含んだ超越方程式となるが、Regula-Falsi法³⁾により容易に解を求めることができる。

3. 数値計算結果

数値計算例として、本州四国連絡橋公団で1983年に完成した因島大橋の断面諸元を用いることにする。その吊橋の形状寸法および断面諸元は以下の通りである。この因島大橋は変断面トラスを有する吊橋であるが、ここでは計算の便宜上、断面剛性を各径間において平均化した換算等価剛性を用いた。

- (1)補剛桁: $L_1 = L_3 = 250m, L_2 = 770m, b = 26.0m, w_1 = w_3 = 21.09t/m, w_2 = 20.31t/m,$
 $w_{s1} = w_{s3} = 16.275t/m, w_{s2} = 15.849t/m, w_{c1} = w_{c2} = w_{c3} = 4.815t/m,$
 $I_{w1} = I_{w3} = 393.200m^6, I_{w2} = 324.400m^6, J_1 = J_3 = 2.901m^4, J_2 = 4.169m^4,$
 $I_{m1} = I_{m3} = 221.200 \cdot \text{sec}^2, I_{m2} = 217.700t \cdot \text{sec}^2, E = 2.1 \times 10^7 t/m^2,$
 $G = 8.1 \times 10^6 t/m^2,$

(a) Hinged-span type bridge



(b) Continuous-span type bridge

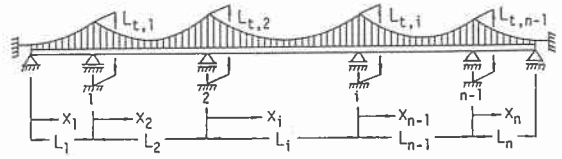


図-4 多径間吊橋の支持形式

(2)ケーブル：サグ長 $f_1 = f_3 = 8.319m$, $f_2 = 76.0m$, $A_c = 0.2281m^2$, $H_w = 19.806t$, $E_c = 2.0 \times 10^7 t/m^2$
 (3)塔： $L_{t1} = L_{t2} = 135.80m$, $I_{t1} = I_{t2} = 3.320m^4$, $E_t = 2.1 \times 10^7 t/m^2$.

上記の同一断面諸元を用いて、補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の2通り、塔頂のケーブル状態が、ローラー結合、鉛直力を無視したヒンジ結合、および鉛直力を考慮したヒンジ結合の3通り、合計6通りの場合について数値計算を行い、さらに重力剛性を無視した場合と考慮した場合について解析を行った。

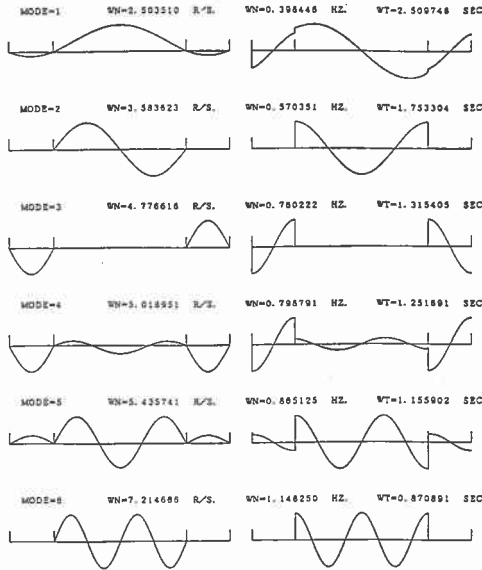


図-5 固有振動モード（単純支持）

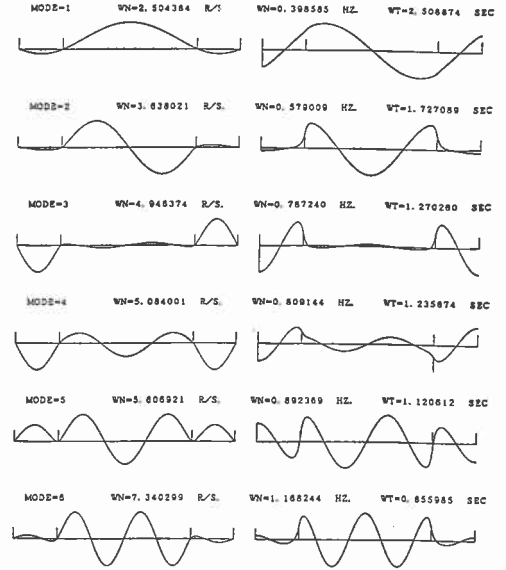


図-6 固有振動モード（連続支持）

図-5は、重力剛性を考慮した場合の単純支持でかつローラー結合の場合におけるねじり角とねじり率の固有振動モードを示している。この単純支持の場合、補剛桁の塔基部の中間支持点において、左右のねじり角（あるいはねじり率）の固有振動モードが不連続になっているのが特徴である。図-6には、重力剛性を考慮した連続支持でかつローラー結合の場合におけるねじり角とねじり率の固有振動モードを示している。この連続支持の場合、補剛桁の中間支持点におけるねじり角の連続条件が常に満足されていることがわかる。なお、塔頂でケーブルがヒンジ結合されている場合の固有振動モードは、図-5、6とほとんど差異がないためにここでは省略する。表-1、表-2には、前述の6通りの場合について、逆対称および対称ねじり振

表-1 固有周期（sec、重力剛性を無視）

Mode types of torsional vibration	Mode order	Hinged-span type			Continuous-span type		
		Roller connection	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)	Roller connection	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)
Asymmetric mode	1st	1.7761	1.7761	1.7761	1.7489	1.7489	1.7489
	2nd	1.3251	1.3242	1.3252	1.2789	1.2782	1.2790
	3rd	0.8736	0.8736	0.8736	0.8586	0.8586	0.8586
	4th	0.5674	0.5674	0.5674	0.6077	0.6077	0.6077
	5th	0.4112	0.4112	0.4112	0.5540	0.5540	0.5540
	6th	0.3828	0.3828	0.3828	0.4061	0.4061	0.4061
Symmetric mode	1st	2.5781	2.5760	2.5783	2.5771	2.5750	2.5774
	2nd	1.2602	1.2600	1.2602	1.2438	1.2436	1.2439
	3rd	1.1624	1.1624	1.1624	1.1265	1.1265	1.1265
	4th	0.6900	0.6900	0.6900	0.6810	0.6810	0.6810
	5th	0.4784	0.4784	0.4784	0.6021	0.6021	0.6021
	6th	0.3826	0.3826	0.3826	0.4700	0.4700	0.4700

表-2 固有周期 (sec、重力剛性を考慮)

Mode types of torsional vibration	Mode order	Hinged-span type			Continuous-span type		
		Roller connection	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)	Roller connection	Hinged connection (N=0)	Hinged connection (N≠0)
Asymmetric mode	1st	1.7533	1.7533	1.7533	1.7271	1.7271	1.7271
	2nd	1.3154	1.3146	1.3155	1.2703	1.2695	1.2703
	3rd	0.8709	0.8709	0.8709	0.8560	0.8560	0.8560
	4th	0.5667	0.5667	0.5667	0.6067	0.6067	0.6067
	5th	0.4109	0.4109	0.4109	0.5533	0.5533	0.5533
	6th	0.3826	0.3826	0.3826	0.4059	0.4059	0.4059
Symmetric mode	1st	2.5098	2.5079	2.5100	2.5089	2.5070	2.5091
	2nd	1.2519	1.2517	1.2519	1.2359	1.2357	1.2359
	3rd	1.1559	1.1559	1.1559	1.1206	1.1206	1.1206
	4th	0.6887	0.6887	0.6887	0.6797	0.6797	0.6797
	5th	0.4780	0.4780	0.4780	0.6012	0.6012	0.6012
	6th	0.3824	0.3824	0.3824	0.4695	0.4695	0.4695

動モードの1次から6次までの固有周期の計算結果が、重力剛性を無視した場合と考慮した場合についてそれぞれ示されている。まず、塔頂のケーブルの結合状態による差異は、対称1次ねじり振動モードにわずかな差はあるものの、高次の固有周期においてほとんどその差はない。すなわち、このような3径間吊橋のねじり振動では、塔頂でのケーブルの結合状態の差異による影響はほとんどないことがわかる。次に、補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の場合について比較すると、各次数の固有周期において、著しい差異が認められる。このことは、両者のねじり振動の固有振動モードが図-5、図-6に示すように、本質的に異なることから容易に推察できる。また、単純支持された吊橋のねじり固有周期の方が、一般的に連続支持された吊橋のねじり固有周期に比べて大きいことがわかる。また、重力剛性を無視した場合と考慮した場合を比較すると若干の差異が認められ、重力剛性を考慮した場合のねじり固有周期の方が小さくなることがわかる。単純支持でローラー結合の場合における固有周期の値は、約2.7%程度の減少が確認される。

4. あとがき

本研究は、撓度理論による重力剛性を考慮した吊橋のねじり振動解析について考察したものである。数値計算により得られた固有周期の値の、補剛桁の支持条件、塔頂におけるケーブルの結合状態の差異による影響、また、重力剛性を考慮することによる影響について比較検討を行った。ここで得られた結論を要約すると以下の通りである。

- (1)塔頂のケーブルの結合状態による差異は、低次の固有振動モードで若干の差はあるものの、その影響はほとんどないことがわかった。
- (2)補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の場合について比較すると、一般的に単純支持された吊橋のねじり振動の固有周期の値は連続支持された吊橋の固有周期に比較して大きい傾向がある。
- (3)数値計算結果より、重力剛性を考慮した場合の吊橋のねじり振動の固有周期は、やや小さな値となり、若干の差異があることが認められた。

(参考文献)

- 1)林川俊郎・渡辺昇：Hamilton 原理を用いた吊橋のねじり振動解析について，土木学会北海道支部論文報告集，第44号，pp.125~128，1985.
- 2)山口宏樹・辰巳正明・宮田利雄：吊橋のねじれ振動における重力剛性とその固有振動数への影響，土木学会論文集，第410号／I-12，pp.369~374，1989.
- 3)Wendroff, B., Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, New York, N.Y., 1966.