

I-77

曲げねじりを考慮した立体骨組モデルの固有周期と精度について

北海道大学工学部 正員 林川 俊郎

北海道大学工学部 学生員 武村 信也

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、地震や風、走行荷重などの構造物に作用する外力の性質と、構造物自身が有する固有振動性状に依るところが大きい。したがって、構造物の動的応答を調べるためには、固有周期および固有振動モードをできるだけ精度良く計算することが重要である。一般的に、構造物の固有振動解析は質量のモデル化により、離散座標系による解と分布座標系による解とに分類される。分布座標系による解は厳密解であるが、離散座標系による解は近似解となるため、その動的応答の評価には固有値の精度が問題となることがある。筆者らは、連続桁橋¹⁾、アーチ橋²⁾、ラーメン橋³⁾等の平面骨組構造物の精度について数学的に、また数値計算によって検討してきた。しかし、曲げねじり変形を考慮した立体骨組構造の固有値の精度について数値計算した研究はまだ数少ないように思われる。

そこで本研究では、曲げねじりを考慮した立体骨組モデルの固有振動解析を行い、求められる固有周期の精度について検討するものである。

2. 固有振動解析

一般に構造物の固有振動解析においては、集中質量法(Lumped Mass Method)や整合質量法(Consistent Mass Method)といった部材要素の質量を離散化し解を求める離散座標系の手法が広く用いられている。一方、部材要素の自由振動を支配する基礎微分方程式の一般解を用いて剛性マトリックスを組み立て、解を求める連続質量法(Continuous Mass Method)は分布座標系に分類される手法である。連続質量法により得られる解は厳密解であるが、部材要素数が多くなり構造物全体の自由度数が大きくなると、演算時間などの面で不利であると同時に、固有値解析が困難になる場合があり、必ずしも汎用的な手法とは言えない。

中実断面あるいは閉じ断面部材で構成された立体骨組モデルは、軸変形、面内および面外の曲げ変形、St.Venantのねじり変形を考慮すれば十分であると言われている。しかし、薄肉開き断面部材より構成される骨組モデルの固有振動解析では、曲げねじり変形(そり変形)の影響を無視することができないと考えられる。特に薄肉開き断面の図心とせん断中心が異なる場合には、その影響が大きいと思われる。

St.Venantのねじりのみを考慮した立体骨組モデルに対する集中質量法、整合質量法、および連続質量法の固有振動解析については文献4)において述べられている。以下に、曲げねじり変形を考慮した離散座標系および分布座標系による解法について示す。

2-1. 離散座標系における曲げねじり要素

部材要素の曲げねじりを考慮する場合は、せん断中心軸まわりのねじり角 $\theta(x)$ は次のように3次の多項式で仮定される。

$$\theta(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (1)$$

仮想仕事の原理を用いて、曲げねじり剛性およびSt.Venantのねじり剛性を含む各部材要素の剛性マトリックスは以下のように求められる。

Natural Periods of Space Rigid Frame Models Considering Warping Deformation and Accuracy.

by Toshiro HAYASHIKAWA, Shinya TAKEMURA and Koichi SATO

$$[\mathbf{K}_\theta] = \begin{bmatrix} \frac{12EC_w}{l^3} + \frac{6GK}{5l} & & & \text{sym.} \\ \frac{6EC_w}{l^2} + \frac{GK}{10} & \frac{4EC_w}{l} + \frac{2GK}{15} & & \\ -\left(\frac{12EC_w}{l^3} + \frac{6GK}{5l}\right) & -\left(\frac{6EC_w}{l^2} + \frac{GK}{10}\right) & \frac{12EC_w}{l^3} + \frac{6GK}{5l} & \\ \frac{6EC_w}{l^2} + \frac{GK}{10} & \frac{2EC_w}{l} - \frac{GK}{30} & -\left(\frac{6EC_w}{l^2} + \frac{GK}{10}\right) & \frac{4EC_w}{l} + \frac{2GK}{15} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 E はヤング係数、 C_w は曲げねじり定数、 G はせん断弾性係数、 K は St. Venant のねじり定数、 l は部材要素の長さである。

同様の手法により、曲げねじり変形を考慮した場合の整合質量マトリックスは次のように表される。

$$[\mathbf{M}_\theta] = \frac{mlI_p}{420A} \begin{bmatrix} 156 & & & \text{sym.} \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

m は単位長さあたりの質量、 A は断面積、 I_p は極慣性モーメントである。

また、集中質量マトリックスは次のような対角マトリックスで表される。

$$[\mathbf{M}_\theta] = \begin{bmatrix} \frac{mlI_p}{2A} & & & \\ & \frac{ml^3I_p}{24A} & & \\ & & \frac{mlI_p}{2A} & \\ & & & \frac{ml^3I_p}{24A} \end{bmatrix} \quad (4)$$

重ね合わせにより組み立てられた構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスを \mathbf{K} 、 \mathbf{M} とすると、離散座標系における構造物の振動数方程式は次のような固有値問題に帰着される。

$$\det|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (5)$$

上式の固有値問題は Householder 法を用いて解いた。

2-2. 分布座標系における曲げねじり要素

部材要素の曲げねじり問題を支配する基礎微分方程式は次式のようなになる⁵⁾。

$$EC_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m \left(\eta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = m_x - \frac{mC_w}{A} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (6)$$

ここで、 η と ξ は断面の図心とせん断中心のずれを表し、 $r_s^2 = (I_y + I_z) / A + \eta^2 + \xi^2$ である。

断面が 2 軸対称であるとすれば、図心とせん断中心のずれ η 、 ξ とともに 0 であり、回転慣性と外部荷重の項を無視すると、式 (6) は次のように簡単化される。

$$EC_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + mr_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

部材要素が調和振動するとすれば、動的なねじり関数 $\theta(x, t)$ は次のように仮定される。

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \exp(i\omega t) \quad (8)$$

ここで、 ω は固有円振動数である。

式 (8) を式 (7) に代入すると、式 (7) の微分方程式の一般解 $\Theta(x)$ は次式のように求められる。

$$\Theta(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x + C \cosh vx + D \sinh vx \quad (9)$$

ここで、 $\mu = \sqrt{GK/2EC_w(\lambda-1)}$ 、 $\nu = \sqrt{GK/2EC_w(\lambda+1)}$ 、 $\lambda = \sqrt{1+4mrs^2EC_w\omega^2/(GK)^2}$

また、 A 、 B 、 C 、 D は積分定数である。部材要素の両端における状態量ベクトルを積分定数で表示し、これらから積分定数を消去すると、最終的に固有円振動数 ω を含む固有剛性マトリックスが次のように求められる。

$$[\mathbf{K}_\theta(\omega)] = k_2 \begin{bmatrix} k_{11} & & & & \text{sym.} \\ k_{21} & k_{22} & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $k_2 = EC_w / \{2(1 - \cos \mu l \cosh \nu l) + (\nu^2 - \mu^2) / (\mu \nu) \sin \mu l \sinh \nu l\}$
 $k_{11} = (\mu^2 + \nu^2)(\nu \cos \mu l \sinh \nu l + \mu \sin \mu l \cosh \nu l)$
 $k_{12} = (\nu^2 - \mu^2)(1 - \cos \mu l \cosh \nu l) - 2\mu \nu \sin \mu l \sinh \nu l$
 $k_{13} = -(\mu^2 + \nu^2)(\mu \sin \mu l + \nu \sinh \nu l)$
 $k_{14} = (\mu^2 + \nu^2)(\cos \mu l - \cosh \nu l)$
 $k_{22} = (\mu^2 + \nu^2)(\sin \mu l \cosh \nu l / \mu - \cos \mu l \sinh \nu l / \nu)$
 $k_{24} = -(\mu^2 + \nu^2)(\sin \mu l / \mu - \sinh \nu l / \nu)$
 $k_{23} = -k_{14}$ 、 $k_{33} = k_{11}$ 、 $k_{34} = -k_{12}$ 、 $k_{44} = k_{22}$

重ね合わせの原理より、式(10)の固有剛性マトリックスを重ね合わせて構造物全体の動的な剛性マトリックスを作成し、境界条件による拘束節点処理を行うと、最終的に分布座標系における構造物の振動数方程式は次のようになる。

$$\det[\mathbf{K}(\omega)] = 0 \quad (11)$$

$\mathbf{K}(\omega)$ は、固有円振動数 ω を含む構造物全体の固有剛性マトリックスである。上式は一般的に ω に関する超越方程式となるため、Regula-Falsi法により解を求めた。

3. 数値解析結果

図-1に示すような2層立体骨組モデルについて数値計算を行った。部材要素は2軸対称断面とし、断面諸元を表-1に示す。境界条件は、最下部の4つの支点で変位、曲げ、ねじりともに固定支持である。集中質量法と整合質量法では1部材につき2分割し、全体の要素分割数は32分割、連続質量法では長さ3mの部材のみ2分割し全体で20分割とした。数値計算は、St.Venantのねじりの場合と曲げねじりを考慮した場合それぞれについて前述の3通りの方法で行った。

表-2は、計算された固有円振動数を示したものである。ここで、集中質量法と整合質量法により計算された固有円振動数は近似解であり、連続質量法により計算された固有円振動数は厳密解である。曲げねじりを考慮しても、固有円振動数はほぼ同じような値であるが、曲げねじりを考慮した場合の値はSt.Venantのねじりの場合と比べて同じか、やや大きい値が得られている。また、整合質量法では8次モードまでは厳密解との差が0.1%程度であり、非常に良い精度で解が求められている。これは、要素分割数が32分割程度で十分であったためと考えられる。

離散座標系による近似解 ω と、連続質量法による厳密解 ω^* との比を各固有振動モードに対して示したものが図-2である。St.Venantのねじりの場合と、曲げねじりを考慮した場合の解の精度はほとんど同じで

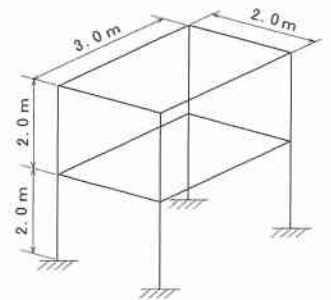


図-1 2層立体骨組モデル

表-1 断面諸元

A (m ²)	I_y (m ⁴)	I_z (m ⁴)	K (m ⁴)	C_w (m ⁶)	w (t/m)
1.175×10^{-3}	4.166×10^{-7}	9.375×10^{-7}	1.823×10^{-8}	6.036×10^{-10}	9.235×10^{-3}

表-2 固有円振動数一覧 (rad/sec)

Mode Order	$C_w=0.0$ (m ⁶)			$C_w=6.036 \times 10^{-10}$ (m ⁶)		
	Lumped	Consistent	Continuous	Lumped	Consistent	Continuous
1	27.443 (-0.412)	27.559 (+0.007)	27.557	27.443 (-0.411)	27.559 (+0.008)	27.557
2	30.774 (-0.798)	31.023 (+0.002)	31.022	30.774 (-0.796)	31.022 (+0.003)	31.022
3	31.228 (-6.315)	33.338 (+0.012)	33.334	31.262 (-6.317)	33.374 (+0.012)	33.369
4	85.952 (-1.867)	87.653 (+0.075)	87.583	85.949 (-1.862)	87.650 (+0.079)	87.584
5	101.320 (-6.814)	108.808 (+0.058)	108.742	101.358 (-6.825)	108.832 (+0.060)	108.768
6	111.165 (-3.878)	115.709 (+0.059)	115.634	111.171 (-3.865)	115.726 (+0.064)	115.657
7	114.414 (-3.183)	118.217 (+0.035)	118.165	114.404 (-3.174)	118.208 (+0.043)	118.166
8	155.105 (-6.331)	165.749 (+0.095)	165.583	155.141 (-6.327)	165.786 (+0.100)	165.628
9	165.450 (-9.147)	183.963 (+1.012)	182.075	165.421 (-9.130)	183.920 (+1.036)	182.077
10	165.594 (-9.156)	184.135 (+1.016)	182.271	165.616 (-9.149)	184.162 (+1.022)	182.309

Note ; () = $(\omega - \omega^*) / \omega^* \times 100$ (%)

あった。これは、部材の長さに対して断面が小さいため曲げねじりの影響が少なかったことが原因であると思われる。

4. あとがき

本研究は、曲げねじりを考慮した立体骨組モデルの固有振動解析を集中質量法、整合質量法、連続質量法を用いて行い、得られた解の精度を St.Venant のねじりのみを考慮した場合と比較したものである。図-1 に示した立体骨組モデルでは、曲げねじりを考慮した場合でも St.Venant のねじりの場合と比べて解の精度に顕著な差はみられなかった。

今後の研究課題として、断面の図心とせん断中心が異なり、曲げとねじりが連成する場合の固有振動解析について検討する予定である。

【参考文献】

- 1) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Continuous Beams, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.111, No.5, May, 1985, pp.639-652.
- 2) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Steel Bridges of Arch-Structural Systems, Proc. of EASEC-3, April, 1991, pp.963-968.
- 3) 林川俊郎 : Vレグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について、構造工学論文集, Vol. 35A, 1989年3月, pp. 719-725.
- 4) 林川俊郎・武村信也・小幡卓司・佐藤浩一 : 3次元骨組構造物の固有値の精度について、土木学会北海道支部論文報告集, 第51号(A), 1995年2月, pp. 286-289.
- 5) 林川俊郎・小幡卓司 : 薄肉直線部材の固有剛性マトリックスの誘導について、土木学会北海道支部論文報告集, 第48号, 1992年2月, pp. 61-64.

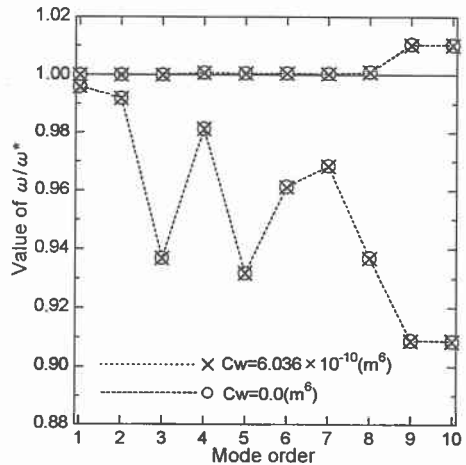


図-2 固有円振動数の精度比較