

I-73 寒冷地道路トンネルの外部断熱材の厚さの算定

北海道大学工学部	正員	三上 隆
北海道開発コンサルタント	正員	岡田正之
北海道大学工学部	学生員	熊谷清貴
釧路工業高等専門学校	正員	芳村 仁

1. はじめに

気象条件の厳しい地点や標高の高い地点に建設される道路トンネルは、つららや側氷の発達、地山凍結による覆工の変形等、凍害を受ける危険性が大きい。例えば、北海道では供用中の道路トンネルのうち、何らかの変状が認められるトンネルはいずれも矢板工法で施工されたものであり、全トンネル数の約半数を占めている<sup>1)</sup>。そのため、冬期間の交通確保および維持管理の労力の軽減を目的に、トンネル内空側に断熱材を設置する、いわゆる外部断熱工法が凍害防止の対策工法の一つとして採用されるようになってきた。

本研究では、既に著者らが発表した新設トンネルに用いられる内部断熱工法（一次覆工と二次覆工の間に断熱材が施工される）の断熱材の厚さの算定法<sup>2)</sup>と同様な主旨に立ち、地山の凍結防止およびつらら防止を目的に、外部断熱材の設計(材料の選定や厚さの決定)が比較的簡単に行える実用的な温度算定式を準定常(周期的)熱伝導解析に基づいて提示する。

2. 基礎方程式

トンネル・地山系の温度挙動の解析を行うために、図-1に示すような断熱材、覆工、地山の三つの要素から成る一次元モデルを用いる。各要素には、断熱材から順次 1, 2, 3 と番号を付し、各要素の長さを  $L_n$ 、熱伝導率を  $k_n$ 、熱容量を  $(\rho c)_n$  および温度を  $U_n$  で表す(ここで、 $n=1\sim 3$ である)。なお地山長さの影響は、半無限体として扱ってもトンネル・地山系の温度分布に大きな影響を与えないので、ここでは地山長さを無限大( $L_3 \rightarrow \infty$ )と仮定する<sup>2)</sup>。

さて各要素の位置座標を  $x$ 、時間を  $t$  で表せば、各要素の温度分布  $U(x, t)$  を記述する熱伝導微分方程

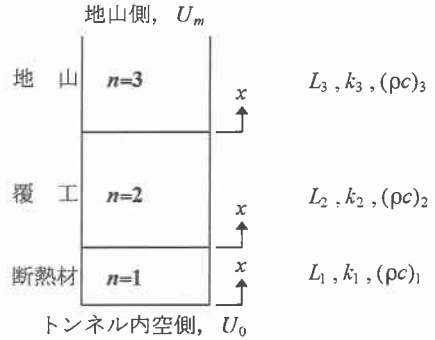


図-1 トンネル・地山モデル

式は以下となる。

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = a_n^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} \quad (n=1\sim 3) \quad \dots\dots (1)$$

ここで、 $a_n^2 = k_n / (\rho c)_n \quad \dots\dots (2)$

であり温度伝播率を表す。

各要素の接触面では、温度と通過熱量に関して以下の連続条件が成立する。

$$U_n(L_n, t) = U_{n+1}(0, t) \quad (n=1,2) \quad \dots\dots (3.a)$$

$$k_n \frac{\partial U_n}{\partial x} \Big|_{x=L_n} = k_{n+1} \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (n=1,2) \quad \dots\dots (3.b)$$

トンネル内空の温度は一般的には不規則に変動するが、基本的には地球自転による日変化および公転による年変化の周期的変動としてとらえられ、このうち日変化のトンネル・地山系の温度特性に与える影響は小さくてほとんど無視できるので、本研究では年変化のみを考慮することにする。また、地中温度は、地中のある深さに達すると変化が認められない不易層が存在し、地温はその地域の年平均気温に等しい一定値になることが知られている。

さらに、トンネル内空側とトンネル壁面間の熱のやりとりは、熱伝達を考慮する必要があるが、温度

A Simplified Equation for Estimating Thickness of Heat Insulator in Existing Tunnels  
by Takashi MIKAMI, Masayuki OKADA, Kiyotaka KUMAGAI and Jin YOSHIMURA

算定式を簡便な形で求めること、および熱伝達を無視すれば算定温度は断熱材の設計に対しては、安全側になることから考えないことにする<sup>2)</sup>。

従って、トンネル内空側と地山側で規定される温度に関する境界条件は、以下となる。

$$U_3(\infty, t) = U_m \quad \dots\dots (4.a)$$

$$U_1(0, t) = U_0 \quad \dots\dots (4.b)$$

ここで、 $U_m$  = 年平均気温、 $U_0$  はトンネル内空側の温度変動を表し次式で与えられる。

$$U_0 = U_m + A_Y \sin(pt) \quad \dots\dots (5)$$

ただし、 $A_Y$  = 年振幅であり、 $p = 2\pi/(365 \times 24)$  は年変化の角速度を表す。

### 3. 基礎方程式の解

連続条件式(3)と境界条件式(4)に対する熱伝導方程式(1)の解は、定常解 $U_{n1}(x, t) = U_m$ および周期的変動成分 $A_Y \sin(pt)$ に対する準定常解 $U_{n2}(x, t)$ の和で与えられる。ここでは、記述の容易性から単位の年振幅( $A_Y = 1$ )に対する解 $U_{n2}(x, t)$ を求めることにする。

式(1)の一般解は次式となる<sup>3)</sup>。

$$U_{n2}(x, t) = \left[ A_n \exp\left\{- (1+i) \sqrt{(p/2)/a_n}\right\} + B_n \exp\left\{(1+i) \sqrt{(p/2)/a_n}\right\} \right] \exp(ipt) \quad (n=1 \sim 3) \quad \dots\dots (6)$$

ここで、 $A_n$  と  $B_n$  は複素定数、 $i = \sqrt{-1}$  であり、地山を半無限と扱うので  $B_3 = 0$  である。

5個の未定複素定数を文献2)に倣い求め、式(6)に代入すれば、トンネル・地山系の解は以下のように整理できる。ここで、

$$\delta_n = L_n/a_n, \quad \beta_n = a_n/k_n, \quad \beta_{ij} = \beta_i/\beta_j$$

$$g_1 = \delta_1 + \delta_2, \quad g_2 = \delta_1 - \delta_2$$

なる諸量を導入すれば、

1) 断熱材部分について ( $n=1$ ):

$$U_{12}(x, t) = (Af_2 - Bf_1)/(A^2 + B^2) \quad \dots\dots (7)$$

ここで、

$$f_1 = R_1 \exp\{h_1(x)\} \cos\{pt + h_1(x)\} + R_2 \exp\{h_2(x)\} \cos\{pt + h_2(x)\} + R_3 \exp\{-h_2(x)\} \cos\{pt - h_2(x)\} + R_4 \exp\{-h_1(x)\} \cos\{pt - h_1(x)\} \quad \dots\dots (8.a)$$

$$f_2 = R_1 \exp\{h_1(x)\} \sin\{pt + h_1(x)\} + R_2 \exp\{h_2(x)\} \sin\{pt + h_2(x)\} +$$

$$R_3 \exp\{-h_2(x)\} \sin\{pt - h_2(x)\} + R_4 \exp\{-h_1(x)\} \sin\{pt - h_1(x)\} \quad \dots\dots (8.b)$$

ただし、

$$R_1 = (1 + \beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{13})/4$$

$$R_2 = (1 - \beta_{12} - \beta_{23} + \beta_{13})/4$$

$$R_3 = (1 - \beta_{12} + \beta_{23} - \beta_{13})/4$$

$$R_4 = (1 + \beta_{12} - \beta_{23} + \beta_{13})/4$$

$$h_1(x) = (g_1 - x/a_1) \sqrt{p/2}$$

$$h_2(x) = (g_2 - x/a_1) \sqrt{p/2}$$

なお、式(7)に現れる  $A$  および  $B$  は、後述の式(13)で与えられる。

2) 覆工部分について ( $n=2$ ):

$$U_{22}(x, t) = (Af_4 - Bf_3)/(A^2 + B^2) \quad \dots\dots (9)$$

ここで、

$$f_3 = R_5 \exp\{h_3(x)\} \cos\{pt + h_3(x)\} + R_6 \exp\{-h_3(x)\} \cos\{pt - h_3(x)\} \quad \dots\dots (10.a)$$

$$f_4 = R_5 \exp\{h_3(x)\} \sin\{pt + h_3(x)\} + R_6 \exp\{-h_3(x)\} \sin\{pt - h_3(x)\} \quad \dots\dots (10.b)$$

ただし、

$$R_5 = (1 + \beta_{23})/2, \quad R_6 = (1 - \beta_{23})/2$$

$$h_3(x) = (\delta_2 - x/a_2) \sqrt{p/2}$$

3) 地山部分について ( $n=3$ ):

$$U_{32}(x, t) = (Af_6 - Bf_5)/(A^2 + B^2) \quad \dots\dots (11)$$

ここで、

$$f_5 = \exp\{h_4(x)\} \cos\{pt + h_4(x)\} \quad \dots\dots (12.a)$$

$$f_6 = \exp\{h_4(x)\} \sin\{pt + h_4(x)\} \quad \dots\dots (12.b)$$

ただし、

$$h_4(x) = (-x/a_3) \sqrt{p/2}$$

なお、式(7)、(9)および式(11)に現れる  $A$  と  $B$  は次式で与えられる。

$$A = \{R_1 \exp(d_1) + R_4 \exp(-d_1)\} \cos(d_1) + \{R_2 \exp(d_2) + R_3 \exp(-d_2)\} \cos(d_2) \quad \dots\dots (13.a)$$

$$B = \{R_1 \exp(d_1) - R_4 \exp(-d_1)\} \sin(d_1) + \{R_2 \exp(d_2) - R_3 \exp(-d_2)\} \sin(d_2) \quad \dots\dots (13.b)$$

ただし、

$$d_1 = g_1 \sqrt{p/2}, \quad d_2 = g_2 \sqrt{p/2}$$

以上の関係式を用いれば、トンネル・地山系の任意の位置における温度挙動の検討が可能であり、また、角速度を  $p = 2\pi/24$  とすれば、日変化の場合にも適用できる。

また、断熱材を用いない状態のトンネル・地山系の

温度挙動を知りたい場合には以下のように扱えばよい。すなわち、実際の覆工厚を  $L$  と記せば、上式において例えば  $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $k_2 = k_1$ ,  $(\rho c)_2 = (\rho c)_1$  と置けばよい。

#### 4. 実用的な温度算定式

ここでは、地山の凍結防止およびつらら防止を目的にした温度算定式を導く。

断熱材を地山の凍結防止のために使用するならば、地山と覆工の境界における温度(以下、覆工背面温度と称する)が次式を満たすように、断熱材の材質、厚さを決めればよい。

$$U_2(L_2, t) = U_m - A_T \cdot \text{Max}(UU_2) \geq 0^\circ\text{C} \dots\dots(14.a)$$

同様に、トンネル内空側に生じるつららを防止するには、覆工と断熱材の境界における温度(以下、断熱材背面温度と称する)が次式を満足するようにすればよい。

$$U_1(L_1, t) = U_m - A_T \cdot \text{Max}(UU_1) \geq 0^\circ\text{C} \dots\dots(14.b)$$

従って断熱材の設計は、その厚さおよび材料を試行錯誤的に変化させて式(14)を満たすように行われる。

なお、式(14)に現れる  $\text{Max}(UU_2)$  および  $\text{Max}(UU_1)$  はそれぞれ、年振幅  $A_T = 1$  としたときの覆工背面温度の振幅および断熱材背面温度の振幅である。前者は式(7)または式(9)  $[U_{12}(L_1, t) = U_{22}(0, t)]$  が成立、後者は式(9)または式(11)  $[U_{22}(L_2, t) = U_{32}(0, t)]$

の温度応答の最大値であり、この値が小さければ小さいほど、冬期間においては地山側からトンネル内空側に向かって流れる熱を断熱することになるので、トンネル・地山系の断熱特性を表す指標となる。

さて、 $\text{Max}(UU_2)$  および  $\text{Max}(UU_1)$  を得るには、式(7)、式(9)等を用いて  $0 \leq t \leq 365 \times 24(\text{h})$  における温度履歴の最大値を見出す必要があり、このままでは実務者が設計を行うには不便である。

そこで前報<sup>3)</sup>と同様に、断熱材の設計が電卓を用いた計算ででき、またトンネル・地山系の温度特性を理解するのにも有益となるように、 $\text{Max}(UU_2)$  及び  $\text{Max}(UU_1)$  を陽な形で求めることにする。

すなわち、式(9)および式(11)に現れる初等関数(三角関数と指数関数)を二次のべき級数で表し、熱容量が他と比較して小さい断熱材の熱容量  $(\rho c)_1$  を零と

すれば、 $\text{Max}(UU_2)$  および  $\text{Max}(UU_1)$  は以下のように得られる。

$$\text{Max}(UU_2) = 1/\sqrt{(C^2 + D^2)} \dots\dots(15.a)$$

$$\text{Max}(UU_1) = \sqrt{(E^2 + F^2)/(C^2 + D^2)} \dots\dots(15.b)$$

ここで、

$$C = 1 + \lambda_1 \dots\dots(16.a)$$

$$D = \lambda_1 + \mu_1 \dots\dots(16.b)$$

$$E = 1 + \lambda_2 \dots\dots(17.a)$$

$$F = \lambda_2 + \mu_2 \dots\dots(17.b)$$

さらに、

$$\lambda_1 = (L_1/k_1 + L_2/k_2)\sqrt{pk_3(\rho c)_3/2} \dots\dots(18.a)$$

$$\mu_1 = \{L_2/(2k_2) + L_1/k_1\}pL_2(\rho c)_2 \dots\dots(18.b)$$

$$\lambda_2 = (L_2/k_2)\sqrt{pk_3(\rho c)_3/2} \dots\dots(19.a)$$

$$\mu_2 = \{L_2/(2k_2)\}pL_2(\rho c)_2 \dots\dots(19.b)$$

#### 5. 数値解析

トンネル・地山系の標準諸元を以下のように設定し、特定のパラメータの影響をみるときは、そのパラメータのみを変化させ、他のそれには標準諸元を用いた。

$$\begin{aligned} \text{断熱材} : k_1 &= 0.02 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C} (= 0.02 \times 1.16 \text{ W/m}^\circ\text{C}) \\ (\rho c)_1 &= 20 \text{ kcal/m}^3\text{C} (= 20 \times 4.19 \text{ kJ/m}^3\text{C}) \end{aligned}$$

$$L_1 = 0.05\text{m}$$

$$\text{覆工} : k_2 = 1, (\rho c)_2 = 400, L_2 = 0.5$$

$$\text{地山} : k_3 = 1, (\rho c)_3 = 500$$

##### 5. 1 温度算定式の精度

上で設定したパラメーター値を標準諸元にし、断熱材の熱容量と厚さのほぼ上限値、中間値および下限値に対する、算定式(15)による  $\text{Max}(UU_2)$  と  $\text{Max}(UU_1)$ 、および式(9)の  $U_{22}(0, t)$  と式(11)による  $U_{32}(0, t)$  の結果(厳密解と称する)の比較を表-1に示す。なお各表で、ブロック内の二つの数値の上段は厳密解、下段のそれは算定式による結果である。これによれば、算定式の結果は厳密解によく一致し(厳密解との相対誤差で1%未満)、算定式の精度は十分であると判断できる。なお、他のパラメータについても同様であった。

##### 5. 2 断熱材の試設計

つららの発生を防止するための断熱材の設計例を

表-1 温度算定式の精度  
(a) 断熱材の熱容量  $(\rho c)_1$

$(\rho c)_1$	断熱材背面温度 Max(UU <sub>1</sub> )	覆工背面温度 Max(UU <sub>2</sub> )
10	0.440	0.357
	0.439	0.355
20	0.440	0.357
	0.439	0.355
80	0.440	0.357
	0.439	0.355

(b) 断熱材の厚さ  $L_1$

$L_1$	Max(UU <sub>1</sub> )	Max(UU <sub>2</sub> )
0.01	0.816	0.661
	0.814	0.658
0.05	0.440	0.357
	0.439	0.355
0.10	0.273	0.221
	0.273	0.220

以下に示す。ただし、トンネル建設地点の年平均気温を  $U_m = 6.0^\circ\text{C}$ 、年振幅を  $A_Y = 15.5^\circ\text{C}$  とし、断熱材を除く他の諸元は覆工厚  $L_2 = 0.6\text{ m}$ 、覆工と地山の熱伝導率は  $k_2 = k_3 = 1.2\text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$ 、覆工と地山の熱容量は  $(\rho c)_2 = (\rho c)_3 = 500\text{ kcal/m}^3^\circ\text{C}$  である。

断熱材の諸元として、熱伝導率  $k_1 = 0.02$ 、厚さ  $L_1 = 0.05$  のものを用いるものとする。式(18)より  $\lambda_1 = 1.392$ 、 $\mu_1 = 0.592$  と得られ、式(16)より、 $C=2.392$ 、 $D=1.984$  となる ( $C^2 + D^2 = 9.658$ )。さらに式(19)より  $\lambda_2 = 0.232$ 、 $\mu_2 = 0.054$ 、式(17)より  $E=1.232$ 、 $F=0.286$  と得られる ( $E^2 + F^2 = 1.600$ )。従って、断熱材背面の温度振幅 Max(UU<sub>1</sub>) は、式(15.b)より

$$\text{Max}(UU_1) = \sqrt{(1.600/9.658)} = 0.407 \text{ となる。つらら}$$

防止のための断熱材背面温度は式(14.a)より

$$U_1(L_1, t) = U_m - A_Y \cdot \text{Max}(UU_1) = -0.3^\circ\text{C}$$

と得られるが、負の温度のためつららが発生する危険がある。

そこで、断熱材の厚さのみを  $L_1 = 0.06\text{ m}$  に変更し、上述の計算を繰返せば、 $\lambda_1 = 1.624$ 、 $\mu_1 = 0.699$ 、 $C=2.624$ 、 $D=0.592$  となる ( $C^2 + D^2 = 12.282$ )。なお  $\lambda_2$  と  $\mu_2$  には、パラメータ  $L_1$  が関係しないので、温度振幅 Max(UU<sub>1</sub>) は、

$\text{Max}(UU_1) = \sqrt{(1.600/12.282)} = 0.361$  となる。断熱材背面温度は  $U_1(L_1, t) = 0.4 \geq 0^\circ\text{C}$  となり、断熱材厚さを  $L_1 = 0.06\text{ m}$  にすればつららの発生を防げることになる。なお、覆工背面温度は式(14.a)で算定でき、 $U_2(L_2, t) = 1.6 \geq 0^\circ\text{C}$  であり、地山凍結の危険もない。

## 6. 結論

本研究は、既設の寒冷地道路トンネルの地山凍結・つらら発生の防止に用いられる外部断熱材施工において、その材質の選択および厚さの決定が比較的簡単に行える温度算定式を準定常(周期的)熱伝導解析に基づいて提示したものである。

最後に本研究は、北海道土木技術会道路トンネル研究委員会の研究成果の一部を取りまとめたものであり、委員各位、関係各機関に謝意の意を表します。

## 参考文献

- 1)坂本稔・川北稔・五十嵐敏彦：道路トンネルの変状実態—北海道の場合—，トンネルと地下，第20巻第5号，pp.31～35，1989.
- 2)三上隆・林憲造・権田静也：寒冷地道路トンネルの断熱材設計のための実用的な温度算定式の提案，土木学会論文集，No.498/VI-24，pp.87～93，1994.
- 3)小平吉男：物理数学(第二巻)，pp.400～409，岩波書店，1940.
- 4)藤田仙之：断熱材の話(前編)，(後編)，日本造船学会誌，第707号(pp.27～38)，第709号(pp.9～16)，1988.