

I-72 部分加熱を受ける長方形厚板の非定常温度場

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒言

弾性体の熱応力解析は、等方性体及び異方性体を問わずに、3次元応力解析が一般的に用いられている。本来は、3次元弾性体或いは3次元固体であっても、一つの或いは二つの座標によって主に支配される弾性体には、簡易化された近似理論がある。平板理論及び殻理論などは、その一例である。平板理論のうち、薄板の熱曲げ解析には、簡易化された理論が見受けられるが¹⁾、厚板の熱曲げ解析には、従来、3次元応力解析が用いられて来た様である^{2),3)}。然しながら、表面荷重を受ける厚板の曲げ理論が特別にある様に、厚板の熱曲げ理論が特別に見出されれば、厚板の熱曲げ解析の有力な解析方法になると考える。とは言え、厚板の熱曲げ理論は、簡易化された近似理論に過ぎないので、厳密な3次元応力解析と比較して、どの程度に精確な理論であるかを緻密に検証する必要がある。

本研究は、長方形厚板の熱曲げを解析する際に必要となる温度場の解析を行うものである。温度場は、3次元熱伝導論を用いて厳密に解析するために、厚板理論及び3次元応力解析の区別はないが、厚板理論により熱曲げ解析を行う場合には、厚板の中央面に座標の原点を置く必要があり、温度場の解析がやや複雑になる。本研究における温度場は、厚板理論を用いる場合に有効である。

2. 熱伝導の方程式とその解

等方性体の熱伝導の方程式は、次の様なものである。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

ここで、 T 、 t 及び κ は、それぞれ、温度、時刻及び温度伝導率を表す。また、 ∇^2 は、直交座標 (x, y, z) におけるLaplaceの演算子である。長方形厚板の座標系を図-1の様に定め、 x 及び y に関する偶の問題に限定すると、式(1)の解は、余関数 T_c と特殊積分 T_p との和で、次の様に表される。

$$T(x, y, z, t) = T_c(x, y, z) + T_p(x, y, z, t) \tag{2}$$

ここで、

$$T_c = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \bar{\beta}_n y (E_{ln}^{(1)} \cos \bar{\gamma}_l z \cosh \bar{l}_l x + E_{ln}^{(2)} \sin \hat{\gamma}_l z \cosh \hat{l}_l x) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x (F_{lm}^{(1)} \cos \bar{\gamma}_l z \cosh \bar{m}_{lm} y + F_{lm}^{(2)} \sin \hat{\gamma}_l z \cosh \hat{m}_{lm} y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y (G_{mn}^{(1)} \cosh \bar{n}_{mn} z + G_{mn}^{(2)} \sinh \bar{n}_{mn} z) \tag{3 a}$$

$$T_p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \left\{ D_{mnl}^{(1)} \cos \bar{\gamma}_l z \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) t \right] + D_{mnl}^{(2)} \sin \hat{\gamma}_l z \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) t \right] \right\} \tag{3 b}$$

また、

$$\bar{l}_l = \sqrt{\bar{\gamma}_l^2 + \bar{\beta}_n^2}, \quad \bar{m}_{lm} = \sqrt{\bar{\gamma}_l^2 + \bar{\alpha}_m^2}, \quad \bar{n}_{mn} = \sqrt{\bar{\alpha}_m^2 + \bar{\beta}_n^2}, \quad \hat{l}_l = \sqrt{\hat{\gamma}_l^2 + \bar{\beta}_n^2}, \quad \hat{m}_{lm} = \sqrt{\hat{\gamma}_l^2 + \bar{\alpha}_m^2} \tag{4 a-e}$$

更に、 $\bar{\alpha}_m$ 及び $\bar{\beta}_n$ は、後に定める固有値であり、 $\bar{\gamma}_l$ 及び $\hat{\gamma}_l$ は、後に定める超越方程式の根である。 $E_{ln}^{(1)}$,

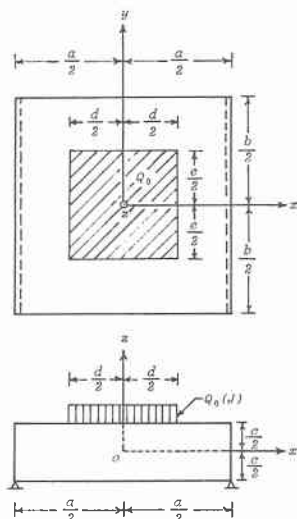


Fig.1 Coordinate system of thick rectangular plate under heat supply.

Transient Temperature Field of a Thick Rectangular Plate Due to a Partial Heat Supply

By Isamu A. OKUMURA

∴, $D_{mnl}^{(2)}$ は、境界条件或いは初期条件から定められる未定定数である。

3. 境界条件, 初期条件及び解

境界条件として、板の上面に部分加熱を受け、下面において熱放散、 y が一定の2辺において断熱、 x が一定の2辺において温度0の場合を考えると、境界条件は、次式となる。

$$x = \pm a/2 \text{ において、 } T = 0 \quad (5 a)$$

$$y = \pm b/2 \text{ において、 } \partial T / \partial y = 0 \quad (5 b)$$

$$z = c/2 \text{ において、 } \partial T / \partial z + hT = Q(x, y) / \lambda \quad (5 c)$$

$$z = -c/2 \text{ において、 } \partial T / \partial z - hT = 0 \quad (5 d)$$

ここで、 h 及び λ は、それぞれ、相対熱伝達率及び熱伝導率を表し、 $Q(x, y)$ は、板の上面の加熱を表す。

また、初期条件として、次式を考える。

$$t = 0 \text{ において、 } T = 0 \quad (6)$$

式(3 a, b) に境界条件(5 a) を課すると、固有値及び未定定数が次の様に定められる。

$$\bar{\alpha}_m = m\pi/a \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \quad E_{l_n}^{(1)} = E_{l_n}^{(2)} = 0 \quad (7 a, b)$$

式(3 a, b) に境界条件(5 b) を課すると、固有値及び未定定数が次の様に定められる。

$$\bar{\beta}_n = 2n\pi/b \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad F_{l_m}^{(1)} = F_{l_m}^{(2)} = 0 \quad (8 a, b)$$

上面に作用する部分加熱は、 x 及び y に関して偶とし、中央に長方形分布する場合を考えると、次式で表される。

$$Q(x, y) = \begin{cases} Q_0 & [|x| < d/2 \text{ かつ } |y| < e/2] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (9)$$

上式を Fourier 級数に展開すると、次式を得る。

$$Q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0} \cos \bar{\alpha}_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \quad (10)$$

ここで、

$$f_{mn} = \begin{cases} \frac{4Q_0}{\pi} \frac{e}{b} \frac{1}{m} \sin \frac{\bar{\alpha}_m d}{2} & [m \geq 1, n = 0] \\ \frac{8Q_0}{\pi^2 m n} \sin \frac{\bar{\alpha}_m d}{2} \sin \frac{\bar{\beta}_n e}{2} & [m \geq 1, n \geq 1] \end{cases} \quad (11)$$

また、 Q_0 は、基準熱 (J) である。

式(7 b), (8 b) 及び式(10) を用いて、式(3 a, b) に境界条件(5 c, d) を課すると、次の二つの式を得る。

$$G_{mn}^{(1)} (h \cosh \xi_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \xi_{mn}^*) + G_{mn}^{(2)} (h \sinh \xi_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \xi_{mn}^*) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_{mnl}^{(1)} \left(h \cos \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} - \bar{\gamma}_l \sin \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} \right) \right. \\ \left. \times \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) t \right] + D_{mnl}^{(2)} \left(h \sin \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} + \hat{\gamma}_l \cos \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} \right) \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) t \right] \right\} = \frac{f_{mn}}{\lambda} \quad (12 a)$$

$$G_{mn}^{(1)} (h \cosh \xi_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \xi_{mn}^*) - G_{mn}^{(2)} (h \sinh \xi_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \xi_{mn}^*) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_{mnl}^{(1)} \left(h \cos \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} - \bar{\gamma}_l \sin \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} \right) \right. \\ \left. \times \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) t \right] - D_{mnl}^{(2)} \left(h \sin \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} + \hat{\gamma}_l \cos \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} \right) \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) t \right] \right\} = 0 \quad (12 b)$$

ここで、 $\xi_{mn}^* = \bar{n}_{mn} c/2$ である。

式(12 a, b) は、時刻 t に無関係に成立すべきであるから、

$$h \cos(\bar{\gamma}_l c/2) - \bar{\gamma}_l \sin(\bar{\gamma}_l c/2) = 0, \quad h \sin(\hat{\gamma}_l c/2) + \hat{\gamma}_l \cos(\hat{\gamma}_l c/2) = 0 \quad (13 a, b)$$

と置くと、式 (12 a, b) は、次式となる。

$$G_{mn}^{(1)}(h \cosh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \zeta_{mn}^*) + G_{mn}^{(2)}(h \sinh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \zeta_{mn}^*) = f_{mn} / \lambda \quad (14 a)$$

$$G_{mn}^{(1)}(h \cosh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \zeta_{mn}^*) - G_{mn}^{(2)}(h \sinh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \zeta_{mn}^*) = 0 \quad (14 b)$$

式 (14 a, b) を $G_{mn}^{(1)}$ 及び $G_{mn}^{(2)}$ について解くと、未定定数が次の様に定められる。

$$G_{mn}^{(1)} = \frac{f_{mn}}{2\lambda} \frac{1}{\Omega_{mn}}, \quad G_{mn}^{(2)} = \frac{f_{mn}}{2\lambda} \frac{1}{\Gamma_{mn}} \quad (15 a, b)$$

ここで、

$$\Omega_{mn} = h \cosh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \zeta_{mn}^*, \quad \Gamma_{mn} = h \sinh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \zeta_{mn}^* \quad (16 a, b)$$

以上により、境界条件は、全て厳密に満足されたことになり、式 (2) の T は、次の様に表される。

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \left(\frac{\cosh \bar{n}_{mn} z}{\Omega_{mn}} + \frac{\sinh \bar{n}_{mn} z}{\Gamma_{mn}} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \\ \times \left\{ D_{mnl}^{(1)} \cos \bar{\gamma}_l z \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) t \right] + D_{mnl}^{(2)} \sin \hat{\gamma}_l z \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) t \right] \right\} \quad (17)$$

式 (17) の T は、初期条件を未だ満足していないので、これに初期条件 (6) を課すると、次式を得る。

$$\frac{f_{mn}}{2\lambda} \left(\frac{\cosh \bar{n}_{mn} z}{\Omega_{mn}} + \frac{\sinh \bar{n}_{mn} z}{\Gamma_{mn}} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(D_{mnl}^{(1)} \cos \bar{\gamma}_l z + D_{mnl}^{(2)} \sin \hat{\gamma}_l z \right) = 0 \quad (18)$$

上式の左辺の最初の二つの項を Fourier 級数に展開して、 $D_{mnl}^{(1)}$ 及び $D_{mnl}^{(2)}$ を定めると、次式を得る。

$$D_{mnl}^{(1)} = -\frac{2f_{mn}}{\lambda} \frac{\bar{\gamma}_l \cos(\bar{\gamma}_l c/2)}{\left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) \left(\bar{\gamma}_l c + \sin \bar{\gamma}_l c \right)}, \quad D_{mnl}^{(2)} = -\frac{2f_{mn}}{\lambda} \frac{\hat{\gamma}_l \sin(\hat{\gamma}_l c/2)}{\left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) \left(\hat{\gamma}_l c - \sin \hat{\gamma}_l c \right)} \quad (19 a, b)$$

上式を式 (17) に代入して整頓すれば、結果としての解が、次の様に求められる。

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \left(\frac{\cosh \bar{n}_{mn} z}{\Omega_{mn}} + \frac{\sinh \bar{n}_{mn} z}{\Gamma_{mn}} - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ U_{mnl} \cos \bar{\gamma}_l z \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2 \right) t \right] - V_{mnl} \sin \hat{\gamma}_l z \exp \left[-\kappa \left(\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2 \right) t \right] \right\} \right) \quad (20)$$

ここで、

$$U_{mnl} = \frac{\bar{\gamma}_l}{\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2} \frac{1}{(1 + ch/2) \sin(\bar{\gamma}_l c/2) + (\bar{\gamma}_l c/2) \cos(\bar{\gamma}_l c/2)} \quad (21 a)$$

$$V_{mnl} = \frac{\hat{\gamma}_l}{\bar{n}_{mn}^2 + \hat{\gamma}_l^2} \frac{1}{(1 + ch/2) \cos(\hat{\gamma}_l c/2) - (\hat{\gamma}_l c/2) \sin(\hat{\gamma}_l c/2)} \quad (21 b)$$

$$\Omega_{mn} = h \cosh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \sinh \zeta_{mn}^*, \quad \Gamma_{mn} = h \sinh \zeta_{mn}^* + \bar{n}_{mn} \cosh \zeta_{mn}^* \quad (22 a, b)$$

$$\frac{ch}{2} \cos \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} - \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} \sin \frac{\bar{\gamma}_l c}{2} = 0, \quad \frac{ch}{2} \sin \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} + \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} \cos \frac{\hat{\gamma}_l c}{2} = 0 \quad (23 a, b)$$

4. 計算結果

数値計算は、辺長比 $b/a = 1.0$ 、加熱幅比 $d/a = e/b = 0.3$ 及び板厚比 $c/a = 1/4$ を持つ正方形厚板について行った。この時に、ビオー数 $H = ch = 0.1$ 及びフーリエ数 $t' = \kappa t/a^2 = 0.01, 0.1, 1.0, 100$ が用いられた。級数の項数は、 m, n 及び l について、それぞれ、最初の 60 項を用い、十分に収束した計算結果を得た。図-2 に、フーリエ数を変えた時の板の上面 ($z = 0.5c$) における x 方向の温度分布を示した。初期条件が、 $T = 0$ であるために、 t' が小さい間は、 T の値は小さく、 t' が増すにしたがい急激に大きくなって、 $t' = 1.0$ において早くも定常状態に達する。これは、フーリエ数 t' にかかる係数が大きく、非定常項がすみやかに減衰するためと思われる。図-3 に、 $t' = 0.1$ の場合の板内部における温度分布を示した。板厚比が $1/4$ の板厚

が比較的小さい場合であるため、板厚方向における減衰が遅く、板の下面においても、温度は、比較的大きな値を示す。図-2及び図-3に見る様に、 T の x 方向における減衰は早く、部分加熱の分布境界($x = 0.15a$)の近くで、 T の値は、急激に変化している。

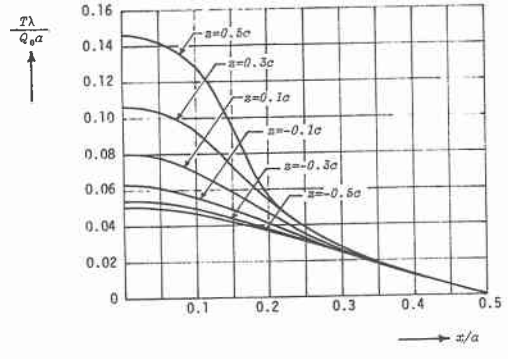
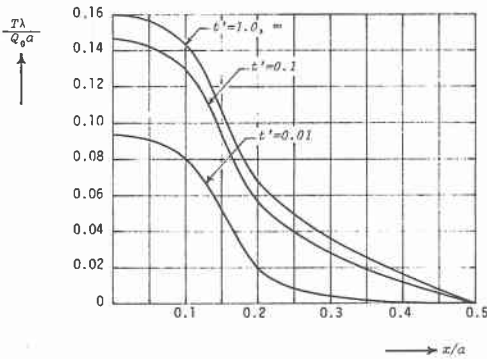


Fig.2 Distributions of T at top face
($y=0, t'=kt/a^2, b/a=1.0, c/a=1/4$).

Fig.3 Variations of T with z for $t'=0.1$
($y=0, b/a=1.0, c/a=1/4$).

また、図-2に見る様に、定常状態に達した板の上面における T の値が極めて小さい。これは、部分加熱の分布幅が小さいためと考えられる。

5. 結 語

3次元熱伝導論に基づいて、上面に部分加熱を受け、下面が熱放散、 x 及び y が一定の各2辺が、それぞれ、温度0及び断熱の境界条件を持つ長方形厚板の非定常温度場を解析した。長方形厚板の場合には、板厚比が小さくなるにつれて、フーリエ数にかかる係数がだんだん大きくなり、非定常項がすみやかに減衰して定常状態に達するのが早い様である。過去において、著者は、扇形厚板と短直方柱の非定常温度場を解析したが、この傾向は見られなかった。計算結果が、境界条件及び初期条件を十分な精確さで満足していることを数値的に確認してある。長方形厚板の熱曲げにおける温度場と応力場とは、本来、独立なものであるが、温度場と応力場の境界条件によっては、温度場における3角関数の助変数を応力場においてもそのまま用いることができることがあり、応力場の解析が極めて容易になる。本研究における長方形厚板の辺における境界条件は、曲げにおける力学的或いは幾何学的境界条件が、それぞれ、 y が一定の2辺が自由及び x が一定の2辺が単純支持の境界条件に対応する様に選ばれている。長方形厚板の熱曲げを3次元応力解析する場合には、応力場に適合させて、温度場は、厚板の下面に座標の原点を置いて解析した方が簡明の様である。

今後、本研究で得られた温度場を用いて、厚板理論により、長方形厚板の非定常熱曲げを解析し、更に、3次元応力解析も行って、厚板の熱曲げ理論の精確性を検討してみたい。

参考文献

- 1) Nowinski, J.L.: Theory of Thermoelasticity with Applications, p.407, Sijthoff & Noordhoff Int. Pub., 1978.
- 2) 野田直剛・竹内洋一郎・高倉賢一: 表面が局部加熱される有限広さの厚板の非定常熱応力, 日本機械学会論文集 (A編), 第48巻427号, pp.329-338, 1982.
- 3) 菅野良弘・木元順一: 変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解, 日本機械学会論文集 (A編), 第53巻494号, pp.1927-1932, 1987.