

# 節点帯板法による箱桁の立体解析

函館工業高等専門学校 正会員 渡辺 力  
 長岡技術科学大学 正会員 林 正  
 函館工業高等専門学校 正会員 外崎 忍  
 函館工業高等専門学校 小林 啓志  
 函館工業高等専門学校 板谷 輝彦

## 1. まえがき

節点帯板法 (NSM) は、薄肉構造物を効率良く全体解析するために開発された解析法である。従来、節点帯板要素の定式化において、板の曲げ変形に Kirchhoff の仮定を用いていたが、Mindlin の仮定を用いた Mindlin 節点帯板要素<sup>1)</sup>により薄肉構造物の線形応力解析<sup>2)</sup>や座屈解析<sup>3)</sup>を行って実用性を検証している。特に、文献 2) ではプレート・ガーダー橋のような梁と板からなる構造物の全体解析を行って、局部的に生じる応力を正確に求めることができることを示した。

本報告では、節点帯板法を用いてダイヤフラムと補剛材を有する箱桁の立体解析を行って、精度と計算効率について他の解法と比較を行う。ダイヤフラムは有限要素で、補剛材はオフセット・ビームでモデル化し、全体解析にあたっては、節点帯板要素の中間節線を消去し、それらを組み立てたブロック要素の段階で、節線自由度をすべて消去するマルチレベルのサブストラクチャー法を用いる。集中荷重に対する収束性を有限帯板法 (FSM) と比較し、一室箱桁および補剛箱桁の全体解析を行って有限要素解と比較を行った結果を報告する。

## 2. 節点帯板法<sup>1)2)</sup>

### (1) 節点帯板要素の変位関数

線形応力解析に用いる要素には、図-1 に示す 10 個の節点と 5 本の節線を有する Mindlin 要素を用いる。要素内の中央面上の任意点  $(\xi, \eta)$  の変位成分を、節点及び節線に関する変位の和として次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \{f_{01}\}^T d_0 + \{f_{11}\}^T \sum X_m d_m \\ v(\xi, \eta) &= \{f_{02}\}^T d_0 + \{f_{12}\}^T \sum X_m d_m \\ w(\xi, \eta) &= \{f_{03}\}^T d_0 + \{f_{13}\}^T \sum X_m d_m \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \{f_{04}\}^T d_0 + \{f_{14}\}^T \sum X_m d_m \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \{f_{05}\}^T d_0 + \{f_{15}\}^T \sum X_m d_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、形状関数ベクトル  $f_{0i}$ ,  $f_{1i}$  や展開関数  $X_m$  は文献 1) と同じ多項式を用いる。Mindlin の仮定を用いて文献 2) と同様に平面シェル要素の平衡方程式が得られる。

### (2) 薄肉構造解析<sup>2)</sup>

図-2 に示すような節点帯板要素の節線に平行に取り付けられた縦 (水平) 補剛材と節線に垂直に取り付けられた横 (垂直) 補剛材をオフセット・ビームとしてモデル化する。

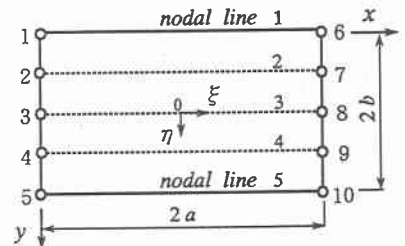


図-1 節点帯板要素

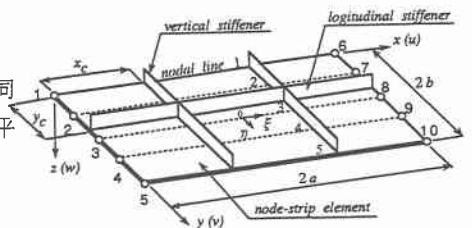


図-2 補剛材

Three Dimensional Analysis of Box-Girder Bridges by Finite Node-Strip Method.

by Chikara WATANABE, Masa HAYASHI, Shinobu TONOZAKI, Hiroshi KOBAYASHI, Teruhiko ITAYA.

また、構造物を構成する基本要素には、節点帯板要素、補剛材（オフセット・ビーム）要素と有限要素（8 節点アイソパラメトリック要素）を用いる。全体解析にあたっては図-3 のように、まず、節点帯板要素に補剛材のオフセットビームを取り付け、中間節線自由度を消去する。これらを幾つか用いてブロック要素を組み立てる。この段階で節線自由度をすべて消去すると、ブロック要素の自由度は通常の FEM と同じ節点自由度のみとなる。次に、ブロック要素を幾つか組み合わせてスーパー要素を作成する。このとき、ダイヤフラムなどの有限要素を組み込んでスーパー要素内の内部自由度を消去する。最後に、スーパー要素を組み立てて全体構造物が得られる。

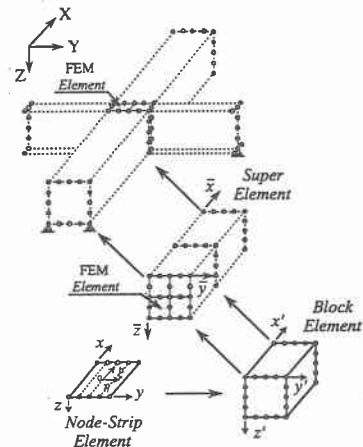


図-3 全体解析の流れ

なお、薄板の剛性行列の計算において、せん断成分のみに次数低減積分を行う選択的積分法を用いる。また、節点帯板要素には面内回転の自由度を含まないために仮想回転剛性を用いて数値計算を行なっている。

### 3. 計算例

集中荷重を受ける正方形板、一室箱桁、補剛箱桁の計算を行って、本解法の計算効率を検証する。比較に用いる有限要素解は、汎用構造解析システム NISA II<sup>4)</sup> の 8 節点アイソパラメトリック要素を用いて計算を行い、応力はその図心点の値を用いる。また、すべての計算例において NSM での応力の計算値には平滑化手法を用いていない。

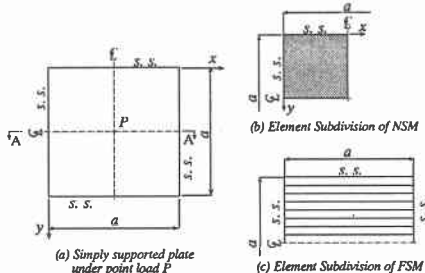


図-4 集中荷重を受ける正方形板

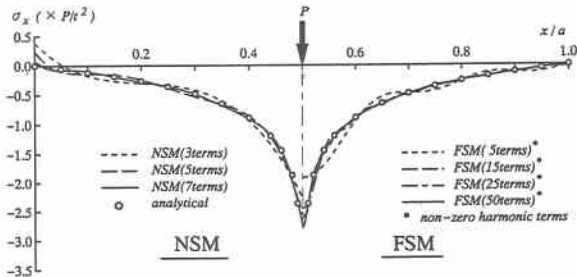


図-5 正方形板の応力

#### (1) 集中荷重を受ける正方形板

図-4 に示す単純支持された正方形板の中央に集中荷重が作用する場合について、板の 1/4 領域を 1 要素用いて計算した結果を解析解<sup>5)</sup>と比較する。また、比較のため FSM (LO2 要素<sup>6)</sup>) による結果も示した。FSM では板の 1/2 領域を 8 要素用いて計算を行っている。

図-5 に板の中央線 (A-A) 上の応力  $\sigma_x$  (級数方向の直応力) を示す。NSM では級数に 3, 5, 7 項を用いた。級数に 3 項用いたときの計算値は若干振動しているが、5 項も用いると解析解と良く一致しており、級数に 7 項も用いると荷重載荷点近傍以外はほぼ収束している。FSM では級数に 15 項 (非零項) 用いると解析解と一致しているが、NSM と同程度の荷重載荷点の計算値を得るには 50 項が必要であった。

#### (2) 一室箱桁

図-6 に示すダイヤフラムを有する一室箱桁に満載等分布荷重が作用する場合について計算した。解析範囲は 1/2 領域とし、ヤング係数を  $E = 2,100,000 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比を  $\nu = 0.3$  とした。

NSM では、1/2 領域をダイヤフラムの取り付け位置で 4 つのブロックに分け、各ブロックでは断面内に

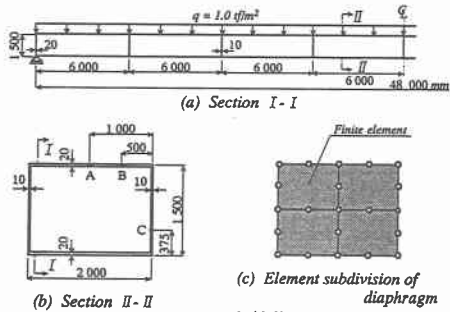


図-6 一室箱桁

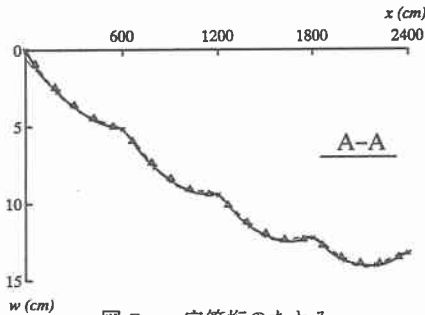


図-7 一室箱桁のたわみ

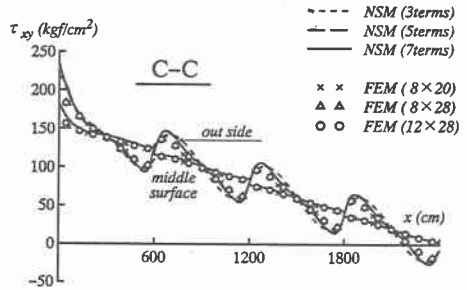
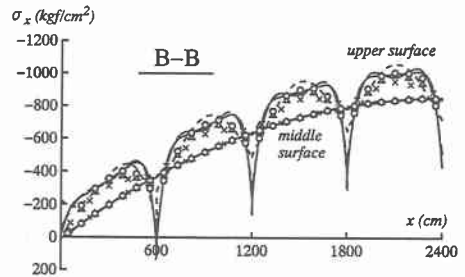


図-8 一室箱桁の応力

板を分割せずに4要素で、全体では16要素を用い、ダイヤフラムには $2 \times 2$ 分割した有限要素(8節点アイソパラメトリック要素)を用いて計算を行った。また、比較のためのFEM解は断面内に8分割(上下フランジ・左右ウェブ各2分割)、長手方向には20分割および28分割した。

図-7にA線上の変位を示す。NSMでは級数に3項用いると収束しておりFEM解と良く一致している。

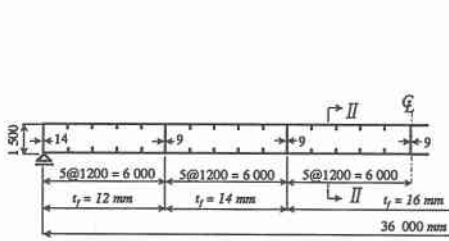
図-8にはB線上(上フランジ)の応力 $\sigma_x$ とC線上(ウェブ)のせん断応力 $\tau_{xy}$ を示す。板の中央面上の応力 $\sigma_x$ は級数に3項用いると収束しており、FEM解と良く一致しているが、板の上面ではダイヤフラムの取り付け点で応力が激しく変化しており、級数に5項用いるとほぼ収束している。FEMでは $8 \times 20$ 分割( $\times$ 印)でNSM解と誤差が見られるが、長手方向に分割を増やした $8 \times 28$ 分割( $\triangle$ 印)でNSM解にだいぶ近づく。さらに、幅方向に上下フランジをそれぞれ2分割づつ増やした $12 \times 28$ 分割( $\circ$ 印)でNSM解と良く一致している。せん断応力 $\tau_{xy}$ は級数に3項用いるとほぼ収束しておりFEMと良く一致している。

本計算例で用いた全自由度数は、NSMで5項用いたときに2550自由度に対して、FEMでは $8 \times 28$ 分割したときに4278自由度、 $12 \times 28$ 分割したときには6582自由度であり、NSMではFEMに対して40%~60%程度の自由度数となっている。

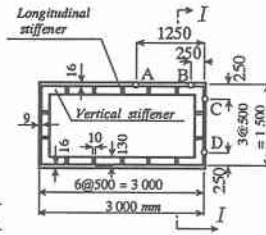
### (3) 補剛箱桁

図-9に示すダイヤフラムと縦・横補剛材を有する一室箱桁に集中荷重100tfを中央に載荷した中央載荷(P1)と偏心させた偏心載荷(P2)の2通りを計算する。桁を長手方向に6等分した位置にダイヤフラムを、上下フランジには等間隔に5本の縦(水平)補剛材、ウェブには等間隔に2本の縦補剛材を有する。また、ダイヤフラム間には等間隔に4本の横(垂直)補剛材を有し、上下フランジは図(a)のように変断面とする。ヤング係数とポアソン比は先の計算例と同じとする。

NSMの要素分割は桁をダイヤフラムの取り付け位置で6つのブロックに分割し、1つのブロックでは上下フランジを各2分割、ウェブを1枚の要素でモデル化する。(全体では36要素を用いる)。また、ダイヤフラムは $2 \times 4$ 分割した有限要素(8節点アイソパラメトリック要素)を、補剛材はオフセット・ビー



(a) Section I - I



(b) Section II - II

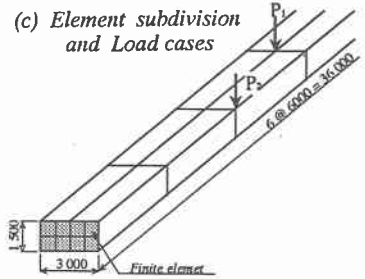


図-9 補剛箱桁

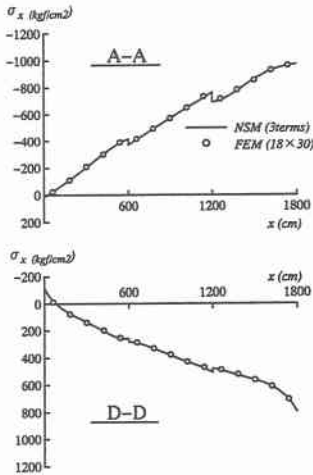


図-10 中央載荷時の応力

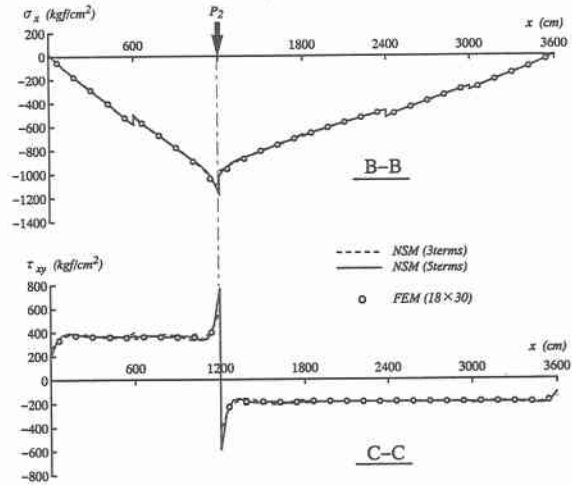


図-11 偏心載荷時の応力

ムでモデル化する。比較に用いる FEM は、断面内に縦補剛材の取り付け位置で分割し（上下フランジ各 6 分割，左右ウェブ各 3 分割），長手方向には 30 分割した。また，補剛材は板要素でモデル化する。

図-10 には，中央載荷時の A 線上（上フランジ）と D 線上（ウェブ）の応力  $\sigma_x$  を示す。NSM では級数に 3 項用いると収束しており，FEM 解と良く一致している。図-11 には，偏心載荷時の B 線上（上フランジ）の応力  $\sigma_x$  と C 線上（ウェブ）の応力  $\tau_{xy}$  を示す。級数に 3 項用いると FEM 解と良く一致している。

本計算例では，補剛材にオフセット・ビームを用いたが，補剛材を板要素でモデル化した FEM 解と良く一致している。

#### 4. 結 論

節点帯板法を集中荷重を受ける正方形板と箱桁の解析に用いた結果から次の様なことが言える。

- (1) 節点帯板法は，有限帯板法に比べ集中荷重に対する応力の収束性が極めて良い。
- (2) 本報告で用いた計算例では，有限要素法の 50%~60% 程度の自由度で局部的に生じる応力を効率良く求めることができる。
- (3) 補剛材をオフセット・ビームでモデル化しても十分な解析精度が得られる。

#### 参考文献

- 1) 林 正・坂口隆紀：Mindlin 節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析，土木学会論文集，No.459/I-22，PP.93-101，1993。
- 2) 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の立体解析，構造工学論文集，Vol.41A，pp.435-442，1995。
- 3) 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の座屈解析，土木学会論文集，No.525/I-33，PP.17-26，1995。
- 4) NISA II ユーザーズ・マニュアル version 93.0：Engineering Mechanics Research Corporation，1994。
- 5) Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of plates and shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959。
- 6) Cheung, Y.K.: *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976。