I－69

Duhamel積分の分割再編の解析

ロック建設技術研究所正会員　今井芳雄

§1.前言　　地 震 加速度の時刻歴波形から一自由度減衰系振動の最大応答変位が求められておる。然し学会誌に発表されるものは大いさの結果グラフで一自由度系がどの時刻でこれに達したのかは発表がない。そこで地震波の最大 gal に目をつけてこの波一つで変位がどうゆう様にあらわれるかを Duhamel 積分の分割と再編によって求める解析が本論の主旨である。

§2、Duhamel　積分

質量 $m = \{weight \times (9.8\,\mathrm{m/sec}^{-2})\}^{-1}$ の質点 m_s にちから $F_{(\tau)}$ が t 時間作用するとニュートンの運動法則から $F_{(\tau)} \cdot t = m \cdot v_0$ ……(2.1) であって 質量 m の要素が入り込む。　質点 m_s は v_0 の速度を得る。質量 m の慣性でいつまでも衰えないでこの v_0 が維持される。運動のエネルギーを保持している。質点 m_s がばね常数 k_e の弾性体で支持されていると変位に比例した反力が及んでやがて一瞬停止する。質点 m_s は反対方向に押されてまた速度 v_0 を得る。これが繰り返され単弦運動が続く。運動の t 秒後の変位は $y_{(t)} = y_0 \cos wt + v_0 \cdot w^{-1} \sin wt$ ……(2.2) である。ここで y_0 を $t=0$ における初期変位 v_0 = 初速度 $w = (k_e \cdot m^{-1})^{\frac{1}{2}}$

(2.1) 式のちから $F_{(\tau)}$ が連続的に変位する時微小時間 $\Delta\tau$ 内は一定とみて

Analysis of cutting and programing Duhamel Integral
by Yosio Imai

$$F(\tau)\cdot\Delta\tau = m\cdot v_0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot3)$$

とおける。従って　$v_0 = \{F(\tau)\cdot\Delta\tau\}\, m^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots (2\cdot4)$

これと(2.2)式から $y_{(t)} = y_0\cos wt + (F_{(\tau)}\cdot\Delta\tau)\, m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot\sin wt \cdots (2\cdot5)$

減衰比 h を入れて初期変位 $y_0=0$　初速度＝0 であれば $F_{(\tau)}\cdot\Delta\tau$ が始まると t 秒後は

$$y_{(t)} = \sum\left[m^{-1}\cdot w^{-1}\left\{F(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot e^{-hw(t-\tau)}\cdot\sin w(t-\tau)\right]\cdots(2\cdot6)\right.$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-1}\int_{\tau=0}^{\tau=t} F(\tau)\cdot e^{-hw(t-\tau)}\cdot\sin w(t-\tau)\,d\tau\cdots(2\cdot7)$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-1}\int_{\tau=0}^{\tau=t} F_{(\tau)}\cdot e^{-hwt}\cdot e^{hw\tau}\{\sin wt\cdot\cos w\tau - \cos wt\cdot\sin w\tau\}\,d\tau\cdots(2\cdot8)$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot e^{-hwt}\left[\sin wt\int_{\tau=0}^{\tau=t_i} F_{(\tau)}\, e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau\,d\tau - \cos wt\int_{\tau=0}^{\tau=t_i} F_{(\tau)}\cdot e^{hw\tau}\cdot\sin w\tau\,d\tau\right]\cdots(2\cdot9)$$

(2.7)式 が Duhamel 積分(2.8)式で $\sin wt$, $\cos wt$ は τ について常数でこれを積分の外に出したのが(2.9)式である。積分上限 t を t_i に変えているが $t \geqq t_i$ であれば成立するわけである。

§3、 Simpson 法則の適用

積分 $\int_{\tau=0}^{\tau=t_i} F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau\,d\tau\cdots(3\cdot1)$ は $e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau$ のほかに τ の関数 $F_{(\tau)}$ があって積分の計算は容易ではない。　なお $\int e^{hw\tau} \times \cos w\tau\cdot d\tau$ は公式集にある。横軸に等間隔の 3 点 $\tau_1\cdot\tau_2$, τ_3 をとり 3 個の値をとりこの 3 点を通る積分関数曲線を τ の　次曲線と近似して

$\int_{\tau=0}^{\tau=t_i}$(τの2次関数)$d\tau$=(3.1)式の値とするSimpson 式を適用する　然る時

(2.4)式の[ ]=$(\sin wt)\cdot A-(\cos wt)\times B$ の形をとりうる

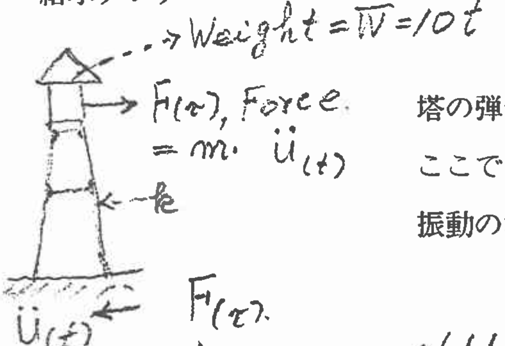
ここに $A=\int_{\tau=0}^{\tau=t_i} F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau d\tau$, $B=\int_{\tau=0}^{\tau=t_i} F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\sin w\tau d\tau$

$$(\sin wt)\times A-(\cos wt)\times B=\sqrt{A^2+B^2}\left\{\sin wt\times\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}-\cos wt\times\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}$$

$\{\quad\}$内 $=\sin wt\times\sin\phi-\cos wt\times\cos\phi=(-)\cos(wt+\phi)$ となる。

§4.　計算例

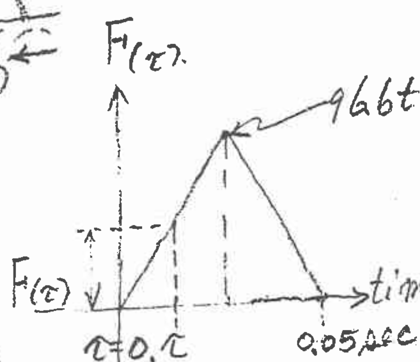
給水タンク



塔の弾性常数 $k=F\cdot\delta^{-1}=918.4\,t\cdot$(長m)$^{-1}$

ここで $\delta=F$の方向 の変形量

振動の減衰比 = $h=0.05$, (長m)$^{-1}$=(meter)$^{-1}$



力, $F(\tau)$ はtime $\tau=0.025$sec で 966t に達し $\tau=0.05$ sec で zero となる

(解) Weight 10t の質量 $m=10t\times(9.8\,\text{meter}\cdot\text{sec}^{-2})^{-1}=1.02t\cdot m^{-1}\cdot\text{sec}^2$

塔の固有円振動数 $w=(k\cdot m^{-1})^{\frac{1}{2}}=\{918.4t(\text{長m})^{-1}\times(1.02t\cdot\text{長m}^{-1}\text{sec}^2)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}$

$=30\,\text{radian}\cdot\text{sec}^{-1}$.

$$y_{(t=0.025\text{sec})}=m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot e^{-hwt}\left[\sin wt\left\{\int_{\tau=0}^{\tau=0.025\text{sec}}F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cos w\tau d\tau\right\}\right.$$
$$\left.-\cos wt\left\{\int_{\tau=0}^{\tau=0.025\text{sec}}F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\sin w\tau d\tau\right\}\right]\cdots\cdots\cdots\quad(4.1)$$

(4.1) 式で計算するため0.05secを4等分しSimpson和を求める縦巨を求めて

Simpson 計算のため数値表

τ, sec	$F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau$	$F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\sin w\tau$
0	0	0
0.0125	45.77 t	18.01 t
0.025	73.45 t	68.2 t
0.0375	26.10 t	43.93 t
0.050	0	0

$e = 2.71828\cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $w = 30\,\text{radian}\cdot\text{sec}^{-1}$

$$\int_{\tau=0}^{\tau=0.025\,\text{sec}} F_{(\tau)}\,e^{hw\tau}\cdot\cos w\tau\,d\tau = 1.068\,t\cdot\text{sec}.$$

$$\int_{\tau=0}^{\tau=0.025\,\text{sec}} F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cdot\sin w\tau = 0.584\,t\cdot\text{sec}$$

$$y_{(t=0.025\,\text{sec})} = m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot e^{-hwt}\left[\sin wt\times(1.068) - \cos wt(0.584)\right]$$

$$= \underbrace{m^{-1}\cdot w^{-1}}_{\underbrace{(1.02\,t\cdot m^{-1}\text{sec}^2\times 30\,\text{sec}^{-1})^{-1}}_{30.6^{-1}\cdot\text{meter}\cdot\text{sec}^{1}}}\cdot e^{-hwt}\cdot(1.068^2+0.584^2)^{\frac{1}{2}}\times\left[\sin wt\times 1.068\,(1.068^2+0.584^2)^{-\frac{1}{2}} - \cos wt\times 0.584\,(1.068^2+0.584^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$-hwt:\quad \underbrace{\underbrace{h\,w}_{0.05\ \ 30}\ \ t}_{-0.0375}\ (t = 0.025)$$

$$e^{-hwt} = e^{-0.0375} = 0.963$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot e^{-hwt}\times 1.217\times\left[\sin wt\cdot\sin\phi - \cos wt\cos\phi\right]$$

ここで $\sin\phi = 1.068\,(1.068^2+0.584^2)^{-\frac{1}{2}} = 1.068 \times 1.217^{-1} = 0.877$

$\phi = \sin^{-1} 0.877 = 1.07\ \text{radian}$

$\cos\phi = 0.584 \times 1.217^{-1} = 0.48 \quad \phi = 1.07\ \text{radian}$

$$y_{(t=0.025\,sec)} = \underbrace{m^{-1}\cdot w^{-1}}_{30.61^{-1}}\cdot \underbrace{e^{-hwt}}_{0.963} \times 1.217 \times (-)\cos\underbrace{(\omega t + \phi)}_{1.82\ \text{radian}}$$

$30 \quad 0.025\,sec. \quad 1.07$

$= 0.0095\ \text{meter} = 0.95\ \text{cm}$

$y_{(t=0.05\,sec)}$ ＝数値表の値を用いて simpson 和を求めて

$= m^{-1}!\, w^{-1}\cdot e^{-hwt}\left[\sin wt \times (1.809) - \cos wt \cdot (1.604)\right]$

$= m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot e^{-hwt}\,(1.809^2+1.604^2)^{\frac{1}{2}}\left[\sin wt \times 1.809 \times 2.418^{-1}\right.$

$\left. - \cos wt \times 1.604 \times 2.418^{-1}\right]$

$= 30.6^{-1} \times 0.928 \times 2.418 \times (-)\cos(1.5 + 0.845) = 0.05\ \text{meter}$

$\ddot{y}_{(t=0.08\,sec)} =$ cos の最大値をとる time $= 0.08\,sec$ において

$= 0.07\ \text{meter} = 7\ \text{cm}$ となる

減衰比 $h = 0.05$ によって振動が次第に縮小する様がみえる。

5.結言

弾性に支持された一自由度系の質点 m_s に作用する力荷重が $zero$ から時間に比例して増大し $0.025sec$ 時に $96.6t$ に達した時 $m\cdot\alpha=F$ の公式から $\alpha=96.6t\times(1.02t(長m)^{-1}\cdot sec^2)^{-1}=94.7m^{sec^{-2}}$ の加速度があらわれているということである。質点は弾性に支持されているものの運動している最中だから $96.6t$ を静力学的に受けている変位には達しない。動的計算からは質点の変位は 96.6 に達した $0.025sec$ 時には $0.95cm$ であった静力学公式からは静止扱いで $96.6ton(k)^{-1}=96.6t\{(918.4t.(長m)^{-1}\}^{-1}=0.105meter$ $=10.5^{cm}$ にもなるわけである。Duhamel 積分の分割再編解析から振幅の減衰する単弦運動で表すことがわかったわけである。

$$\int_{\tau=0}^{\tau=\tau}F(\tau)\cdot e^{hw\tau}\cos w\tau\,d\tau,\quad \int_{\tau=0}^{\tau=\tau}F_{(\tau)}e^{hw\tau}\cdot\sin w\tau\,d\tau$$ において

$F(\tau)=constant$

で積分の外に出ると計算式は $F(\tau)\int_{\tau=0}^{\tau=\tau}e^{hw\tau}\cos w\tau\,d\tau=\{w^2\times(h^2+1)\}^{-1}\times[e^{hw\tau}(hw\cos w\tau+w\sin w\tau)-hw]\times F(\tau);\ F(\tau)\int_{\tau=0}^{\tau=\tau}e^{hw\tau}\sin w\tau\,d\tau=\{w^2(h^2+1)\}^{-1}[e^{hw\tau}(hw\sin w\tau-w\cos w\tau+w)]\times F(\tau)$

円固有振動数 $w=(k.m^{-1})^{\frac{1}{2}}$ が大きな要素である。ちからFをうける長さ l の cantilever ついては $k=F\{Fl^3(3EI)^{-1}\}^{-1}=l^{-3}3EI$ 曲げ moment M の stres σ_c は $M\cdot c.I^{-1}$ である l,E,I を定まると $w^2=k.m$ から w が求まる、変位 y を求める(ちから$=k\cdot y$)$\times l=M$ から σ_c が定まる。所望の σ_c におさまなければ改めてkから出発する。

1995－10－17