

I-53 衝撃荷重を受ける積層板の解析

北海道大学工学部 学生員 熊谷清貴
 北海道大学工学部 正員 三上 隆
 釧路工業高等専門学校 正員 芳村 仁

1. はじめに

積層板は、その優れた材料特性から多くの工学的分野での使用を目指し数多くの研究がなされている。著者ら¹⁾もこれまでに、自由振動特性を明らかにしてきたが、より積極的な利用を計るには、まだ検討すべき問題が残されている。本論文で取り上げる衝撃問題もその一つである。ここでは、Mindlin 板理論を拡張した1次せん断変形理論に基づいて、衝撃荷重を受ける任意形状積層板の応答特性の解明を目的に、アイソパラメトリック要素による定式化を試みる。なお定式化では、薄板の解析における非常に剛すぎる解の出現を避けるために、次数低減積分法の適用が容易になるように剛性マトリックスの作成に配慮を加えた。

2. 解析方法

2.1.基礎関係式²⁾

図-1に示すような積層板に座標軸をとり、 x, y, z 軸方向の変位を u, v, w とする。歪み-変位の関係式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \gamma_{zx} &= \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (1)$$

と表せる。ここで u_0, v_0 は板の中央面での変位である。また、一般的な合応力成分と歪み成分、曲率成分との関係は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym. & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & & & & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性、 D_{ij} は曲げ剛性、 B_{ij} 曲げ伸張カップリング剛性である。これらは弾性係数、ポアソン比、積層状態（構成、層数等）を与えることにより決定する。

2.2.エネルギー

ここでは、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを求めることにより、ハミルトンの原理

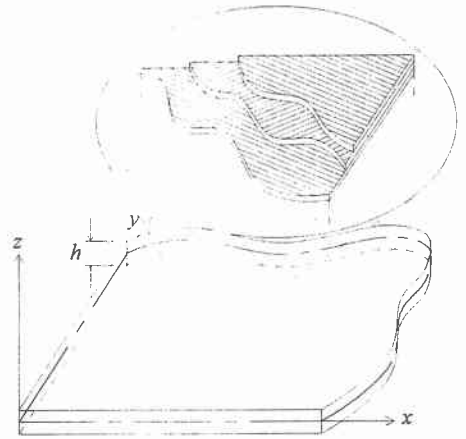


図-1 解析モデル

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\Pi - E) dt = 0 \quad \Pi = U - W \quad \dots\dots\dots (3)$$

から運動方程式を導き出す。ただし

Π : ポテンシャルエネルギー, E : 運動エネルギー, U : 歪みエネルギー, W : 外力エネルギーである。

式(2)のまま剛性マトリックスを導けば, 種々の剛性の影響が加え合わさった形で得られるので, ここでは, 式(2)を次式のように拡張する。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{M}' \\ \mathbf{Q}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{ただしマトリックス中の成分は,}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{D}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & A_{16} & A_{12} \\ & A_{66} & A_{66} & A_{26} \\ & & A_{66} & A_{26} \\ \text{Sym.} & & & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{B}' \\ \mathbf{A}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} & B_{16} & B_{12} \\ & B_{66} & B_{66} & B_{26} \\ & & B_{66} & B_{26} \\ \text{Sym.} & & & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{A}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{16} & D_{16} & D_{12} \\ & D_{66} & D_{66} & D_{26} \\ & & D_{66} & D_{26} \\ \text{Sym.} & & & D_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{A}'' \\ \mathbf{A}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} & A_{55} & A_{45} \\ & A_{44} & A_{45} & A_{44} \\ & & A_{55} & A_{45} \\ \text{Sym.} & & & A_{44} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{Q}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x & N_{xy} & N_{xy} & N_y \end{Bmatrix}^T, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{Q}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x & M_{xy} & M_{xy} & M_y \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}' \\ \mathbf{Q}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x & Q_y & Q_x & Q_y \end{Bmatrix}^T \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y} & \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix}^T, \quad \begin{Bmatrix} \{\kappa\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} & \frac{\partial \psi_x}{\partial y} & \frac{\partial \psi_y}{\partial x} & \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \{\psi\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x & \psi_y & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

式(4)の特徴は, 合応力, 曲げモーメント及びせん断力の成分をそれぞれ4つの成分で表したことである。

(1) 歪みエネルギー

直歪み, 曲げ, せん断歪みに関するエネルギーをそれぞれ U_N , U_M , U_Q とすると,

$$U_N = \frac{1}{2} \iint \{\varepsilon\}^T \{\mathbf{N}'\} dx dy = \frac{1}{2} \iint (\{\varepsilon\}^T [\mathbf{A}'] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T [\mathbf{B}'] \{\kappa\}) dx dy \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

$$U_M = \frac{1}{2} \iint \{\kappa\}^T \{\mathbf{M}'\} dx dy = \frac{1}{2} \iint (\{\kappa\}^T [\mathbf{B}'] \{\varepsilon\} + \{\kappa\}^T [\mathbf{D}'] \{\kappa\}) dx dy \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

$$U_Q = \frac{1}{2} \iint \{\psi\}^T \{\mathbf{Q}'\} dx dy = \frac{1}{2} \iint \{\psi\}^T [\mathbf{A}'] \{\psi\} dx dy \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

となり, 全体の歪みエネルギーは次式で表される。

$$U = U_N + U_M + U_Q = \frac{1}{2} \iint (\{\varepsilon\}^T \{\mathbf{N}'\} + \{\kappa\}^T \{\mathbf{M}'\} + \{\psi\}^T \{\mathbf{Q}'\}) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint (\{\varepsilon\}^T [\mathbf{A}'] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T [\mathbf{B}'] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [\mathbf{B}'] \{\varepsilon\} + \{\kappa\}^T [\mathbf{D}'] \{\kappa\} + \{\psi\}^T [\mathbf{A}'] \{\psi\}) dx dy \quad \dots\dots\dots (7)$$

(2) 運動エネルギー

要素の運動エネルギーは密度を ρ , 変位を \mathbf{u} とすると次式で表される。

$$E = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\rho] \{\dot{\mathbf{u}}\} dV = \frac{1}{2} \int_A \{\dot{\mathbf{d}}\}^T [\mathbf{m}] \{\dot{\mathbf{d}}\} dA \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, マトリックス $[\mathbf{m}]$ 及び $\{\mathbf{d}\}$ は以下のように定義する。

$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & I_1 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}, \quad I_i = \sum_{L=1}^N \int_{h_L}^{h_{L+1}} \rho^L z' dz \quad (i=0,1,2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\{\mathbf{d}\} = \{u_0 \quad v_0 \quad \psi_x \quad \psi_y \quad w\}^T \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(9)において、 N は積層数、 ρ^L は第 L 層のラミナの密度である。

(3) 外力エネルギー

外力によるエネルギーは次式で表される。

$$W = \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{P}\} dV = \int_A \{\mathbf{d}\}^T \{\mathbf{F}\} dA \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\{\mathbf{P}\}$ は外力ベクトルの強度、 $\{\mathbf{F}\}$ は単位面積当たりの荷重強度である。

2.3.各マトリックスの組立

(1) 剛性マトリックス

剛性マトリックスは次式のようになる。

$$[\mathbf{K}_1] = \int_A [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{A}'] [\mathbf{B}_1] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{A}'] [\mathbf{B}_1] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12.a)$$

$$[\mathbf{K}_2] = \int_A [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{B}'] [\mathbf{B}_1] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{B}'] [\mathbf{B}_1] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12.b)$$

$$[\mathbf{K}_3] = \int_A [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{B}_1] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{B}_1] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12.c)$$

$$[\mathbf{K}_4] = \int_A [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{A}'] [\mathbf{B}_2] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{A}'] [\mathbf{B}_2] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12.d)$$

ここで、 $[\mathbf{K}_1]$ は伸び剛性に依存する剛性マトリックス、 $[\mathbf{K}_2]$ は伸びと曲げが連成するマトリックス、 $[\mathbf{K}_3]$ は曲げ剛性に依存する剛性マトリックス、及び $[\mathbf{K}_4]$ はせん断変形の影響を表すマトリックスであり、それぞれの特性に応じた積分則により数値的に評価される。また、式中の \mathbf{J} はヤコビアンマトリックスであり、剛性マトリックスの誘導過程で用いる形状関数³⁾は、例えば8節点四辺形要素の場合 Serendipity 系の補間公式を用いると式 (13.1)、9節点四辺形要素の場合 Lagrange 系の補間公式を用いると式 (13.2)のようになる。

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \left\{ (1+\xi_i \xi)(1+\eta_i \eta) - (1+\eta_i \eta)(1-\xi^2) - (1+\xi_i \xi)(1-\eta^2) \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ (1-\xi_i^2)(1+\eta_i \eta)(1-\xi^2) + (1-\eta_i^2)(1+\xi_i \xi)(1-\eta^2) \right\} \quad \dots\dots\dots (13.1)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \left\{ (3\xi_i^2 - 2)\xi^2 + \xi_i \xi + 2(1-\xi_i^2) \right\} \left\{ (3\eta_i^2 - 2)\eta^2 + \eta_i \eta + 2(1-\eta_i^2) \right\} \quad \dots\dots\dots (13.2)$$

要素全体の剛性マトリックス $[\mathbf{K}_e]$ は、この4つの剛性マトリックスを組み合わせることにより得られる。

(2) 質量マトリックス

要素の質量マトリックス $[\mathbf{M}_e]$ は次式に定義する形状関数マトリックスを用いて、次のように表される。

$$[\mathbf{M}_e] = \int_A [\mathbf{N}(\xi, \eta)]^T [\mathbf{m} \mathbf{N}(\xi, \eta)] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}(\xi, \eta)]^T [\mathbf{m} \mathbf{N}(\xi, \eta)] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$[\mathbf{N}(\xi, \eta)] = \text{diag}[\Psi' \quad \Psi' \quad \Psi' \quad \Psi' \quad \Psi'] \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$[\Psi'] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_n] \quad \dots\dots\dots (16)$$

(3) 外力ベクトル

板にかかる外力は w 方向(z 方向)のみなので、要素の各節点に対する外力ベクトル $\{\mathbf{f}_e\}$ は、

$$\{\mathbf{F}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad q\}^T \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\{f_e\} = \int_A [N(\xi, \eta)]^T \{F\} dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T \{F\} \det |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

2.4. 運動方程式

式(3)に対して、2.2-3.で求めた各要素ごとのエネルギーを適用する。

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \iint (\{\epsilon\}^T [A'] \{\epsilon\} + \{\epsilon\}^T [B'] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B'] \{\epsilon\} + \{\kappa\}^T [D'] \{\kappa\} + \{\psi\}^T [A''] \{\psi\}) dx dy = \frac{1}{2} \{a_e\}^T [K_e] \{a_e\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\delta U_e = \delta \{a_e\}^T [K_e] \{a_e\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\delta W_e = \delta \{a_e\}^T \{f_e\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$E_e = \frac{1}{2} \int_A \{\dot{d}\}^T [m] \{\dot{d}\} dA = \frac{1}{2} \int_A \{a_e\}^T [N(\xi, \eta)]^T [m] [N(\xi, \eta)] \{\ddot{a}_e\} dA = \frac{1}{2} \{a_e\}^T [M_e] \{\ddot{a}_e\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\delta E_e = -\delta \{a_e\}^T [M_e] \{\ddot{a}_e\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $\{a_e\}$ は接点変位ベクトルである。これにより、運動方程式は次のように求められる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \{a_e\}^T [[M_e] \{\ddot{a}_e\} + [K_e] \{a_e\} - \{f_e(t)\}] dt = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$[M_e] \{\ddot{a}_e\} + [K_e] \{a_e\} - \{f_e(t)\} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$[K_e]$, $[M_e]$, $\{f_e(t)\}$ はそれぞれ式(12), (14), (18)で得られたものである。

積層板全体のマトリックスは、全体の要素数を NE とすると

$$[M] = \sum_{e=1}^{NE} [M_e] \quad , \quad [K] = \sum_{e=1}^{NE} [K_e] \quad , \quad \{f(t)\} = \sum_{e=1}^{NE} \{f_e(t)\}$$

となり、従って全体の運動方程式は、

$$[M] \{\ddot{a}\} + [K] \{a\} - \{f(t)\} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。式(27)の解は、数値積分法^{4, 5)}の適用により解くことができる。

3. あとがき

ここでは、次数低減積分法の適用が容易になるように、定式化の過程に配慮を加えて運動方程式を導いた。今後は、数値計算を行って積層板の応答特性を把握するとともに、幾何学的非線形の影響も明らかにする予定である。

参考文献

- 1) 芳村仁・三上隆・朴勝振：逆対称アングル・ブライ積層板の自由振動，
構造工学論文集，vol.37A，pp.911-919，1991
- 2) 福田博 他訳：複合材料の構造力学，
日刊工業新聞社，昭和62年
- 3) 遠田良喜：有限要素法の基礎
培風館，1984
- 4) M.A.Dokainish and K.Subaraj：A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-I, Computers & Structures, vol.32, No.6, pp.1371-1386, 1989
- 5) K.Subaraj and M.A.Dokainish：A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-II, Computers & Structures, vol.32, No.6, pp.1387-1401, 1989