

材料の配分最適化手法による補強材の最適配置

北海道大学工学部 正会員 佐々木 康彦
北海道大学工学部 学生員 広 島 隆 司

1. はじめに

連続体の形状あるいは位相(トポロジー)を含めた形態の最適化問題は、構造物や機械の設計に関連した重要な問題の一つであり、その最適化問題は多くの設計者の関心を集めている。最近では、菊池らが均質化法を用いて、位相を含めた形態最適化問題(レイアウト最適化問題)を材料の分布あるいは配分の最適化問題に置き換える手法を提案している^{1),2)}。

本研究ではこのような構造材料の配分最適化手法を応用して、「主体構造(主要な構造要素)」の周辺空間における“最適な補強構造”の生成・抽出を試みた。この最適化問題では、均質化法に準じて周期性をもつ多孔質状の微細構造を仮定し、孔のサイズおよび単位構造の回転角を設計変数とする。体積比制約のもとで平均コンプライアンスを目的関数に選び、最適規準法³⁾に基づいて補強構造のレイアウト最適化に関する基礎的な数値解析を行った。

2. 構造材料の微細構造

均質化法では、図1に示すように周期性をもつ多孔質状の微細構造を仮定し、さらにその構成要素として単位微細構造(ユニットセル)を考える。すなわち、レイアウトする領域を「設計領域」と呼ぶと、そこに微小な長方形孔を無数にあけることで“多孔質体”を形成し、その微細構造を定義するユニットセルの大きさを変化させることで多孔質の度合いを決める。また相対的な孔の大きさだけでなくユニットセルを最適な方向に回転させることにより、非常に自由度の大きい多孔質を作り出すことができる。そして、設計領域における任意点での微細構造を決定する長方形孔の正規化した寸法 a 、 b およびユニットセルの回転角 θ が設計変数となる。

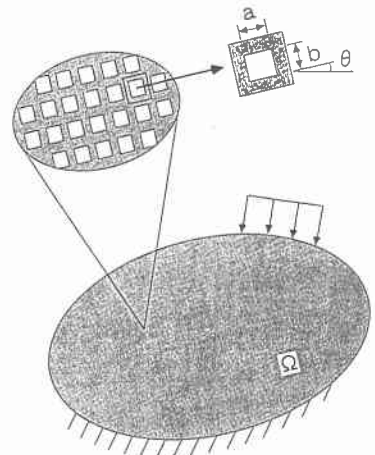


図1 設計領域における微細構造と設計変数

3. 材料の配分最適化手法

3.1 配分最適化問題の設定

この最適化問題では設計領域における「平均コンプライアンス」を目的関数に選び、その最小化をめざす。これは、構造剛性の最大化を意味する。また、設計領域に全く孔の開いていない状態に対する使用可能な材料の「体積

Optimal Shape and Topology of Structural Reinforcements Using a Material Distribution Approach by SASAKI Yasuhiko and HIROSHIMA Takashi

比」を制約条件とする。

3.2 最適化問題の解法プロセス

構造材料の配分最適化に際して、最初に設計領域を有限要素法で離散化する。この配分最適化問題の解法プロセスの概要を図2に示す。

以下では2次元弾性問題を考える。設計領域における構造材料の均質化した弾性定数 E_{ijkl}^H の算定について、均質化法では理論解析および補間多項式を用いた方法によっている。最終的に必要な均質化弾性定数 E_{ijkl}^G は、この弾性定数 E_{ijkl}^H を角度 θ だけ回転させたもので、座標変換マトリクス $R_{ii}(\theta)$ を用いて、次式から算定する。

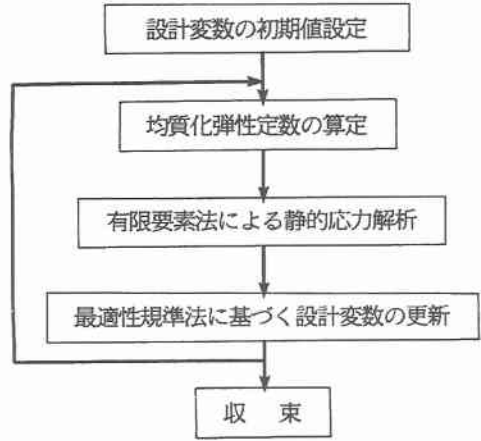


図2 配分最適化問題の解法プロセス

$$E_{ijkl}^G = \sum_{I,J,K,L=1}^2 E_{IJKL}^H(a,b)R_{Ii}(\theta)R_{Jj}(\theta)R_{Kk}(\theta)R_{Ll}(\theta) \quad \dots\dots\dots(1)$$

本研究では簡単のために、ユニットセルの回転前の均質化した弾性定数 E_{ijkl}^H は、次のような近似式を用いた。

$$E_{ijkl}^H = (1-a)(1-b)E_{ijkl} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 E_{ijkl} は等方性材料とした多孔質体の実質部分の弾性定数である。

3.3 最適性規準法に基づく設計変数の更新

本研究で設定した配分最適化問題は、平均コンプライアンスを表す目的関数と使用材料の体積比を与える制約条件およびラグランジュの未定乗数から構成される「ラグランジュ関数」によって定式化される。さらに、最適性規準法を適用して、このラグランジュ関数の停留値を「最適性規準」とする。そして、この最適性規準を満足するような以下に示す漸化式に基づいて、設計変数およびラグランジュ乗数を更新しながら、最適化過程の反復計算を進める。

$$a^{(k)} = \text{Min} \left\{ \text{Max} \left\{ 0, \left(\frac{-2\lambda^{(k-1)}b^{(k-1)}}{\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial a} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}} \right)^{\rho a} \times a^{(k-1)} \right\}, 1 \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$b^{(k)} = \text{Min} \left\{ \text{Max} \left\{ 0, \left(\frac{-2\lambda^{(k-1)}a^{(k)}}{\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial b} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}} \right)^{\rho b} \times b^{(k-1)} \right\}, 1 \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)} - \rho_{\theta} \times \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\lambda^{(k)} = \left(\frac{\int_{\Omega_s} (1 - a^{(k)} b^{(k)}) d\Omega}{\Omega_s} \right)^{\rho_{\lambda}} \times \lambda^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 u_i は構造変位、 Ω_s は使用可能な材料の体積、 $\rho_a, \rho_b, \rho_{\theta}, \rho_{\lambda}$ は、収束性に関するパラメーターを表す。

4. 数値解析例

数値解析モデルとしては、長方形の設計領域に主体構造として構造に必要と考えられ、あらかじめ材料を多く配分し固定領域とした2径間連続桁の中央部に剛性の高い主塔を持つものを選び、この主体構造以外の領域に最適な補強空間を探るための領域を設定したものである。配分される材料比は主体構造が3割、補強構造が7割である。数値解析では対称条件を考え、右半分で解析を行う。設計領域には主体構造も含めるが、最適化過程では全く孔の開かない固定領域とするため、多孔質領域は補強空間だけである。

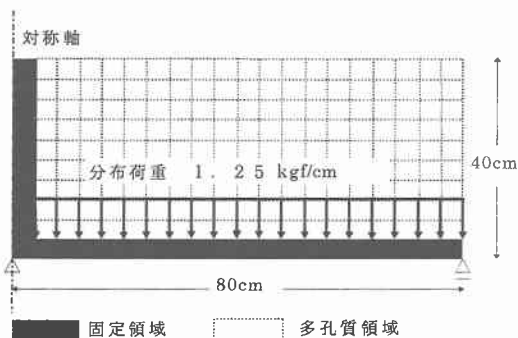


図3 数値解析モデルの概要

設計領域の寸法は縦40cm、横80cm、要素分割数は縦10×横20である。また、実質部分の材料は等方性とし、その弾性係数 $E = 2.1 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。使用材料の体積比の制約条件に関しては、多孔質領域での体積比を40%とした。これは、多孔質領域に全く穴のあいていない状態を100%としたときその40%で最適化を行うことを意味する。ここでは荷重条件を、径間に等分布満載荷重 $w = 1.25 \text{ kgf/cm}$ 、径間の中央部に集中荷重 $P = 90 \text{ kgf}$ とし、荷重条件の相違による補強構造の比較検討を行った。なお、各有限要素の設計変数である長方形孔の a, b の初期値については、最適化の収束を早めるために前述の規定した体積比に一致するような値を全要素に設定した。

図4に最適化過程における体積比の推移と平均コンプライアンスの収束状況を示す。これらの結果から、荷重条件が等分布満載荷重、集中荷重(径間中央部)いずれの場合でも体積比がほぼアクティブな制約条件として作用すること、平均コンプライアンスの値が漸次単調減少しながら材料配分の最適化が進行していることがわかる。この図で特徴的なことは、等分布満載荷重、集中荷重(径間中央部)の平均コンプ

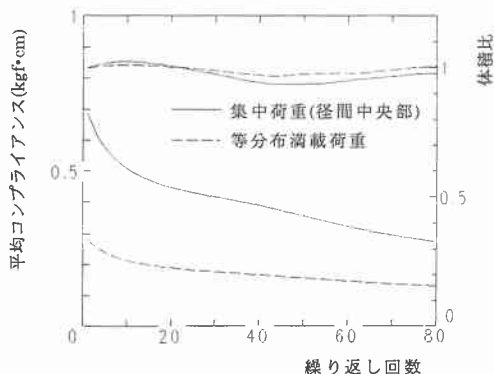


図4 体積比と平均コンプライアンスの収束状況

ラアンスの値が漸次単調減少しながら材料配分の最適化が進行していることがわかる。この図で特徴的なことは、等分布満載荷重、集中荷重(径間中央部)の平均コンプ

ライアンスの初期値がそれぞれ 0.2825、0.6865(kgf・cm)繰り返し回数 80 回の値は 0.1314、0.2739(kgf・cm)であり集中荷重(径間中央部)の方が平均コンプライアンスの値が大きいが平均コンプライアンスの減少率も大きいことである。

図 3 に示す数値解析モデルに(a)等分布満載荷重(b)径間中央部に集中荷重を作用させたときの繰り返し数 80 回の最適化結果を図 5 (a)、(b)に示す。この結果は、繰り返し数 80 回において(a)、(b)いずれの場合も平均コンプライアンスの相対誤差が 1%以下であり、収束とみなした。これらの結果は各要素での長方形孔の寸法から算定する正規化した無次元密度

$$\rho = 1 \cdot (1 - a b) \quad \dots\dots(7)$$

を 5 段階の濃淡で表示したものである。

(a)等分布満載荷重の場合は、材料配分が主塔側において、桁と主塔を結ぶように 3 角形の補強が見られ、右支承側にはアーチ形状が見られる。それに対して、(b)集中荷重(径間中央部)の場合は等分布満載荷重に見られた 3 角形状の補強が帯状となり右支承側のアーチ形状も小さくなっている。また、集中荷重の場合はより材料が集まりやすい傾向がある。

これらの結果から、補強材の配置問題について図 5 に示されるような密度濃淡図から推察すると等分布満載荷重に対しては補強する形状として面状の部材が考えられ、集中荷重に対しては線状の部材による補強が考えられる。

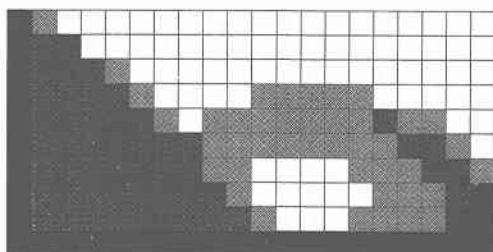
5. あとがき

今後は、構造材料の均質化弾性定数の算定に均質化法を適用するとともに、最適化過程の収束性を早め、精度を高めるために設計変数の漸化式を工夫改良する予定である。

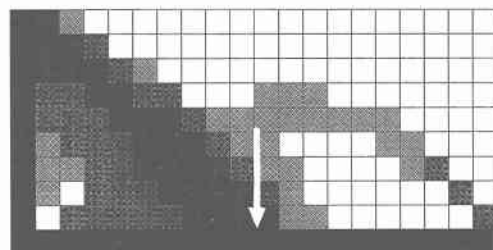
さらには、配分最適化手法によるさまざまな数値解析事例に基づいて、最適な補強構造の形態に関する評価方法についても研究を進めたい。

参考文献

- 1) Bennds ϕ e, M.P. and N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71 (1988), 197-224.
- 2) Suzuki, K. and N. Kikuchi, A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93 (1991), 291-318.
- 3) Vennkayya, V.B., Optimality criteria: a basis for multidisciplinary design optimization, Computational Mechanics, 5 (1989), 1-21.



(a) 等分布満載荷重



(b) 集中荷重(径間中央部)

図 5 連続桁・主塔系の周辺空間における最適な補強構造