

I-15 塑性域の広がりによる剛性の低下を考慮した剛性マトリックスの誘導

北海道大学工学部 正 員 平沢秀之
 北海道大学工学部 正 員 林川俊郎
 北海道大学工学部 正 員 佐藤浩一

1. はじめに

骨組構造物の弾性域を越えた後の挙動を把握するには、部材の接線剛性を正確に算定しなければならない。弾塑性応力状態のはりの曲げモーメント～曲率関係は非線形となるため、はりの変形を求めるためには解析的な方法では困難なことが多く、また複雑な構造物の弾塑性挙動を求めることは容易ではない。本報告では弾性限界以降の非線形な接線剛性を部材断面内の降伏応力に達していない部分を有効とした変断面と見なすことにより求め、さらに弾塑性部材の剛性マトリックスを誘導し、力と変位の関係を陽な形で表すことを目的としている。ここでは曲げを受ける矩形断面はり、及び曲げと曲げねじりを受けるI形断面はりを対象とし、剛性マトリックスを誘導した。ここで得られた剛性マトリックスを用いれば、通常の弾性計算と同様な方法で、複数の部材から成る骨組構造物にも適用することが可能である。

解析に先立ち、次のような仮定を設けている。(1)材料は完全弾塑性体とし、ひずみ硬化は考慮しない。(2)幾何学的な非線形性は無視し、微小変位理論によるものとする。はりの崩壊は材料の塑性化によってのみ生じ、部材の局所的な、あるいは全体座屈現象は生じないものとする。(3)荷重はすべて節点に働く集中荷重とし、中間荷重は作用しないものとする。また、荷重は一定の割合で変化する比例漸増荷重とする。(4)部材要素は全断面弾性の範囲内では、一定な断面を有する直線部材とする。断面内の一部が降伏し、それ以外の部分が弾性範囲内であるときは、増分荷重に対する部材の剛性を求める際、弾性の部分のみを考慮するものとする。

2. 曲げを受けるはり^{1),2)}

2.1 弾塑性部材

剛性マトリックスの誘導に当たり、応力 σ と曲げモーメント M との関係、および曲げモーメント M 、せん断力 S と弾塑性境界との関係をまず求めることにする。図-1(a)のような矩形断面を有するはり部材が曲げモーメントを受け、部材端から x だけ離れた断面における応力分布が図-1(c)のようであるとする。ここで δ は、応力 σ が降伏応力 σ_y となる位置を表すパラメータである。このとき、この断面に作用している曲げモーメントを M_x とすると、 M_x は次式となる。

$$M_x = M_0 \left(1 - \frac{4}{3} \delta^2\right) \quad (1)$$

ここで、 M_0 は全塑性曲げモーメントである。一方、この部材の左端に作用しているせん断力を S_i 、曲げモーメントを M_i とおくと、左端から x の距離における断面の曲げモーメント M_x は次式のようにになる。

$$M_x = M_i - S_i x \quad (2)$$

なお、 S_i 、 M_i は図-1(b)の矢印の方向を正の方向とした。式(1)、(2)より M_x を消去して δ を求めると次式のようにになる。

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0}} \quad (3)$$

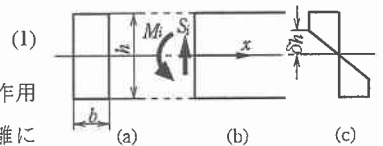


図-1 矩形断面はりと応力分布

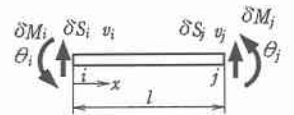


図-2 はり要素

Stiffness Matrix Induced by Considering Spread of Plasticity and Decrease of Rigidity

by Hideyuki HIRASAWA, Toshiro HAYASHIKAWA and Koich SATO

仮定に示したように、はりが弾性部分の高さ(2δh)をもつ変断面部材であるとすれば、この範囲における断面2次モーメント I_x は、

$$I_x = \frac{b(2\delta h)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left(\frac{S_i}{M_0}x + 1 - \frac{M_i}{M_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

である。なおここで、 I_x は $y \geq \delta h$ の部分を無視しているが、応力の分布は図-1(c)の通りで、 $y \geq \delta h$ の範囲でも $\sigma = \sigma_y$ は作用しているものとする。すなわち、漸増荷重を受けながら、 $y \geq \delta h$ で一定値 σ_y を保持し、 $y < \delta h$ で増加する応力を受け持つと見なしている。

2. 2 剛性方程式

今、図-2に示すような曲げモーメントとせん断力を受ける長さ l のはり要素を考える。仮想外力による補仮想仕事 δW_c は次式のようになる。

$$\delta W_c = v_i \delta S_i + \theta_i \delta M_i + v_j \delta S_j + \theta_j \delta M_j \quad (5)$$

ここで、 δS_i 、 δS_j ：仮想材端せん断力、 δM_i 、 δM_j ：仮想材端曲げモーメント、 v_i 、 θ_i 、 v_j 、 θ_j ：実際の材端変位である。また内力による補仮想仕事 δV_c は、曲げ変形のみを考慮すると次式のようになる。

$$\delta V_c = \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{EI} dx \quad (6)$$

力のつり合いより、

$$S_j = -S_i, \quad M_j = -M_i + S_i l \quad (7a,b)$$

が成り立つから、これらを式(5)に代入して、

$$\begin{aligned} \delta W_c &= v_i \delta S_i + \theta_i \delta M_i + v_j (-\delta S_i) + \theta_j (-\delta M_i + \delta S_i l) = \delta S_i (v_i - v_j + l\theta_j) + \delta M_i (\theta_i - \theta_j) \\ &= [\delta S_i \quad \delta M_i] \left\{ \begin{array}{c} v_i \\ \theta_i \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} -1 & l \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} v_j \\ \theta_j \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。さらに、部材中間 x の点における曲げモーメント(式(2))を式(6)に代入することにより、

$$\begin{aligned} \delta V_c &= \int_0^l [-\delta S_i x + \delta M_i] [EI_x]^{-1} [-S_i x + M_i] dx \\ &= [\delta S_i \quad \delta M_i] \int_0^l \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix} [EI_x]^{-1} \begin{bmatrix} -x & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \end{Bmatrix} = [\delta S_i \quad \delta M_i] \begin{bmatrix} \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx & -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx \\ -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx & \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。式(8)、(9)を補仮想仕事の原理($\delta W_c = \delta V_c$)に代入して、任意の δS_i 、 δM_i に対して恒等的に等式が成立するという条件を用いると、結局次式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & l \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、

$$A = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx, \quad C = -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx, \quad D = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx \quad (11a,b,c)$$

とおいた。式(10)を S_i 、 M_i について解き、式(7)に代入することにより、 S_j 、 M_j を求めることができる。これらをまとめてマトリックスの形に整理すると、次式のようになる。

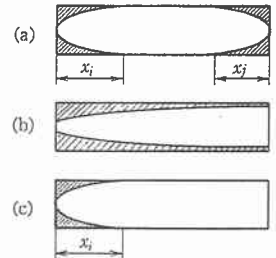


図-3 塑性域

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{D_0} \begin{bmatrix} D & -C & -D & DI+C \\ -C & A & C & -CI-A \\ -D & C & D & -DI-C \\ DI+C & -CI-A & -DI-C & DI^2+2CI+A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $D_0=AD-C^2$ である。

塑性域は、一般的には図-3(a)のように左右両端から広がっていると考えることができ、図-3(b)、(c)は(a)の特別な場合と見なすことができる。すなわち、(b)は(a)において $x_i>l$ 、 $x_j=0$ 、(c)は、 $x_j=0$ とすることにより(a)に含めて考えることができる。したがって(a)となる部材要素について、断面2次モーメント I_x を求めると、

$$I_x = \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left(\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq x_i), \quad \frac{bh^3}{12} \quad (x_i \leq x \leq l-x_j), \quad \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left(\frac{S_j}{M_0} x - \frac{S_j}{M_0} l + 1 - \frac{M_j}{M_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (l-x_j \leq x \leq l) \quad (13a,b,c)$$

となる。この I_x を式(11)に代入し、 A 、 C 、 D を求めて式(12)に代入すると、部材要素の剛性方程式を得ることができる。 A 、 C 、 D は計算結果のみ示すと次のようになる。

$$A=A_1+A_2+A_3, \quad C=C_1+C_2+C_3, \quad D=D_1+D_2+D_3 \quad (14a,b,c)$$

$$A_1 = \frac{M_0 x_i^2}{EIS_i} \left[-\frac{2}{3} + \frac{8M_0}{9S_i x_i} - \frac{16}{27} \left(\frac{M_0}{S_i x_i} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{M_i}{M_0} \right) \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_i}{M_0} \right)} \right\} \right], \quad A_2 = \frac{1}{3EI} \{ (l-x_j)^3 - x_i^3 \}$$

$$A_3 = \frac{M_0 l^2}{EIS_j} \left[\frac{2}{3} \left\{ \left(1 - \frac{x_j}{l} \right)^2 - 1 / \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} - \frac{8M_0}{9S_j l} \left\{ \left(1 - \frac{x_j}{l} \right) - \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} + \frac{16}{27} \left(\frac{M_0}{S_j l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right) \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} \right] \quad (15a,b,c)$$

$$C_1 = \frac{M_0 x_i}{EIS_i} \left[\frac{2}{3} - \frac{4M_0}{9S_i x_i} \left\{ 1 - \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_i}{M_0} \right)} \right\} \right], \quad C_2 = -\frac{1}{2EI} \{ (l-x_j)^2 - x_i^2 \}$$

$$C_3 = \frac{M_0 l}{EIS_j} \left[-\frac{2}{3} \left\{ \left(1 - \frac{x_j}{l} \right) - 1 / \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} + \frac{4M_0}{9S_j l} \left\{ 1 - \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} \right] \quad (16a,b,c)$$

$$D_1 = -\frac{2M_0}{3EIS_i} \left\{ 1 - 1 / \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_i}{M_0} \right)} \right\}, \quad D_2 = \frac{1}{EI} (l-x_j-x_i),$$

$$D_3 = \frac{2M_0}{3EIS_j} \left\{ 1 - 1 / \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_j}{M_0} \right)} \right\} \quad (17a,b,c)$$

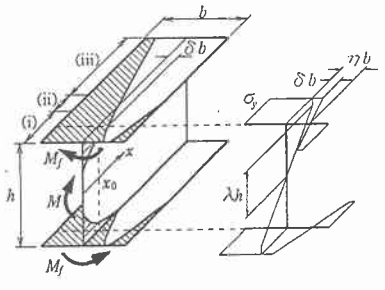


図-4 塑性域の広がりを表すパラメータ

3. 曲げと曲げねじりを受けるはり

3.1 弾塑性部材

図-4(a)のようにI形断面はりが曲げモーメント M と曲げねじりモーメント W を受けて塑性域が広がっている場合を考える。このとき上下フランジには、 W に起因する面内曲げモーメント M_f による曲げ応力 σ_w と M による引張又は圧縮応力 σ_m が生じている³⁾。この状態におけるある断面の応力分布は σ_m と σ_w を合成したもので図-4(b)のようになり、 η 、 δ 、 λ は $\sigma=\sigma_y$ となる位置を表すパラメータである。この応力分布から、この断面内に作用する曲げモーメントと曲げねじりモーメントを求めると次式のようになる。

$$(i): \quad m = \frac{4}{4+\alpha} \left\{ 2\eta + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{3} \right) \right\}, \quad w = 1 - \frac{4}{3} \delta^2 + \frac{8}{3} \delta \eta - \frac{16}{3} \eta^2 \quad (18a,b)$$

ここで、 α はウェブの断面積とフランジの断面積の比である。また λ に関してはフランジ中央部におけるひずみとウェブ上下縁におけるひずみは等しいという条件より、 $\lambda=(\eta-\delta)/(2\eta)$ の関係式が成り立つ。

式(18a,b)は図-4(a)の(i)の範囲内における m, w の式であるが、(ii)、(iii)についても同様にして応力分布を考え、 m, w の式を導くと以下ようになる。

$$(ii) : \quad m = \frac{4\eta}{4+\alpha} \left\{ 2 + \frac{\alpha}{6(\eta-\delta)} \right\}, \quad w = 1 - \frac{4}{3}\delta^2 + \frac{8}{3}\delta\eta - \frac{16}{3}\eta^2 \quad (19a,b)$$

$$(iii) : \quad m = \frac{4}{4+\alpha} \left[\left\{ 1 - \frac{(1/2-\delta)^2}{2(\eta-\delta)} \right\} + \frac{\alpha\eta}{6(\eta-\delta)} \right], \quad w = \frac{2(1/2-\delta)^2}{3(\eta-\delta)}(1+\delta) \quad (20a,b)$$

3. 2 剛性方程式

部材要素の剛性方程式を誘導するに当たって、1. で述べたように増分荷重に対しては、塑性域の部分の剛性は考えず、弾性域の部分のみの剛性を考慮するので、変断面部材と見なした要素の剛性マトリックスを導く必要がある。剛性方程式を誘導する際、2. では補仮想仕事の原理を適用したが、これは要素内の任意の断面における曲げモーメントが、部材端における曲げモーメントによって表すことができ、マトリックスの要素も部材軸に関する積分を実行することにより比較的容易に得ることができた。しかしながら、曲げねじりモーメントは曲げモーメントのような力のつり合いが成立せず、要素内での任意の断面での曲げねじりモーメントの値が部材端における値ばかりではなく、変位の影響も受ける⁴⁾。このため部材軸に沿って変化する断面2次モーメントや曲げねじり定数等が、材端における断面力と部材軸の関数形として表すことができない。このため、ここでは変断面のはり部材を軸方向にさらに分割し、1つ1つの分割された要素に伝達マトリックス法の手法を応用して1部材の剛性マトリックスを作成する方法を用いた。

今、変断面を有する長さ l の1部材について考える(図-5(a))。両節点 i, j に作用する断面力は、図の矢印の向きを正とする。この部材を軸方向に n 要素に分割し、1つの要素内では断面定数は一定とする。この1つの要素($k, k+1$)について剛性方程式を立てると式(21)ようになる。なおこの場合の断面力は図-5(b)の矢印の向きを正とする。

$$\{X_{Ak}\} = [K_{Ak}]\{u_{Ak}\} \quad (21)$$

ここで、

$$\{X_{Ak}\} = \{S_k \ M_k \ T_k \ W_k \ S_{k+1} \ M_{k+1} \ T_{k+1} \ W_{k+1}\}^T \quad (22)$$

$$\{u_{Ak}\} = \{v_k \ \theta_k \ \varphi_k \ \varphi'_k \ v_{k+1} \ \theta_{k+1} \ \varphi_{k+1} \ \varphi'_{k+1}\}^T \quad (23)$$

であり、 $S, M, T, W, v, \theta, \varphi, \varphi'$ はそれぞれ $k, k+1$ におけるせん断力、曲げモーメント、ねじりモーメント、曲げねじりモーメント、鉛直変位、たわみ角、ねじり角、ねじり率である。また $[K_{Ak}]$ は曲げねじりを考慮した剛性マトリックスで、以下ようになる。

$$[K_{Ak}] = \begin{bmatrix} -k1 & -k2 & 0 & 0 & k1 & -k2 & 0 & 0 \\ k2 & k3 & 0 & 0 & -k2 & k4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k5 & -k6 & 0 & 0 & k5 & -k6 \\ 0 & 0 & -k6 & -k7 & 0 & 0 & k6 & -k8 \\ -k1 & -k2 & 0 & 0 & k1 & -k2 & 0 & 0 \\ -k2 & -k4 & 0 & 0 & k2 & -k3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k5 & -k6 & 0 & 0 & k5 & -k6 \\ 0 & 0 & k6 & k8 & 0 & 0 & -k6 & k7 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで、

$$k1 = \frac{12EI}{l^3}, \quad k2 = \frac{6EI}{l^2}, \quad k3 = \frac{4EI}{l}, \quad k4 = \frac{2EI}{l}, \quad k5 = \frac{12EC_W}{l^3} + \frac{6GJ_T}{5l},$$

$$k6 = \frac{6EC_W}{l^2} + \frac{GJ_T}{10}, \quad k7 = \frac{4EC_W}{l} + \frac{2GJ_T l}{15}, \quad k8 = \frac{2EC_W}{l} - \frac{GJ_T l}{30} \quad (25a \sim h)$$

である。次に、 $\{X_{Ak}\}$ 、 $\{u_{Ak}\}$ の k 、 $k+1$ に関する要素を分離して並べ替え、 $\{y_{k+1}\}$ 、 $\{y_k\}$ とおくと、次のように変形することができる。

$$\{y_{k+1}\} = [K_{Bk}]\{y_k\} \quad (26)$$

ここで、

$$\{y_{k+1}\} = \{v_{k+1} \theta_{k+1} \varphi_{k+1} \varphi'_{k+1} S_{k+1} M_{k+1} T_{k+1} W_{k+1}\}^T \quad (27)$$

$$\{y_k\} = \{v_k \theta_k \varphi_k \varphi'_k S_k M_k T_k W_k\}^T \quad (28)$$

である。また $[K_{Bk}]$ は、 $[K_{Ak}]$ を $\{y_k\}$ 、 $\{y_{k+1}\}$ に対応させて並べ替えたものである。この $\{y_k\}$ 、 $\{y_{k+1}\}$ は伝達マトリクスにおける状態ベクトルに対応し、 $[K_{Bk}]$ は格間行列に対応している⁹⁾。但し荷重項を算定するための項は除いてある。なおここでは中間荷重や中間支点については考えていないので格点行列に対応するものは考慮していない。

式(26)は k 、 $k+1$ に関する方程式であるが、 $k=1 \sim n$ についても成立するのでこれらを組み合わせて図-5(a)の左端 i と右端 j に関して次式が成り立つ。

$$\{y_j\} = [K_{Bn}][K_{Bn-1}] \cdots [K_{B2}][K_{B1}]\{y_i\} = [K_B]\{y_i\} \quad (29)$$

$\{y_i\}$ 、 $\{y_j\}$ の要素を節点力と節点変位に分離して並べ替え、 $\{X\}$ 、 $\{u\}$ とおくと次のように変形することができる。

$$\{X\} = [K_C]\{u\} \quad (30)$$

ここで、

$$\{X\} = \{S_i M_i T_i W_i \quad S_j M_j T_j W_j\}^T \quad (31)$$

$$\{u\} = \{v_i \theta_i \varphi_i \varphi'_i \quad v_j \theta_j \varphi_j \varphi'_j\}^T \quad (32)$$

である。また $[K_C]$ は、 $[K_B]$ を $\{X\}$ 、 $\{u\}$ に対応させて並べ替え、符号を図-5(a)の矢印の向きを正となるように修正したものである。この式(30)を用いれば通常の剛性マトリクス法と同様に計算を行うことができる。

4. 数値計算例

2. 及び3. で誘導した剛性方程式を用いて数値計算を行った。計算モデルには、曲げを受ける矩形断面はりに対しては図-6(a)を、曲げと曲げねじりを受けるI形断面はりに対しては図-6(b)を用いた。計算結果を矩形断面はりの場合について図-7、8に、I形断面はりの場合について図-9、10に示す。図-7は載荷点における荷重変位曲線である。P=6413[kgf]で左端が降伏し始め、剛性が徐々に低下しながら左端塑性ヒンジ→載荷点塑性ヒンジ→右端塑性ヒンジとなり、はりは崩壊する。図-8は崩壊時における塑性域の広がりを表したものである。弾性域と塑性域の境界は、節点におけるせん断力と曲げモーメントが与えられれば、式(3)によって容易に計算することができる。

図-9は載荷点におけるねじり角とねじりモーメントとの関係を表している。荷重はPとTの比率を一定(1:6)にした比

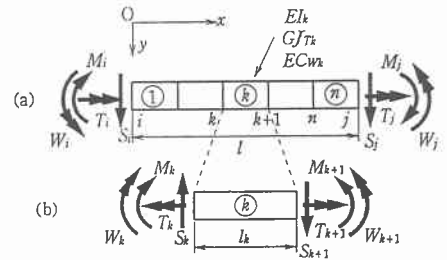


図-5 節点力

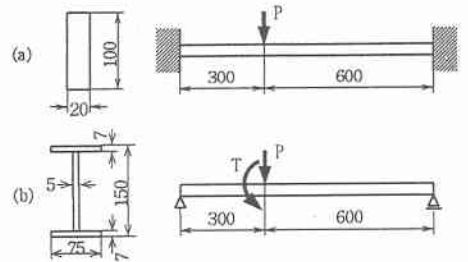


図-6 計算モデル

例漸増荷重とし、支持条件は鉛直変位及びねじり角を固定、たわみ角及び軸方向変位を自由とした。またはり全体を10節点9要素に分割し、3. 2におけるマトリクス $[K_{ik}]$ 、 $[K_{jk}]$ を求めるために1要素につき10分割している。図-7と同様、初期降伏を越えてから剛性が徐々に低下し、荷重点で塑性ヒンジを形成し、はりが崩壊することが示されている。図-10(a)はフランジの、(b)はウェブの崩壊時における塑性域の広がりを表したものである。ウェブの塑性域は曲げモーメントにより生じており、上下対称に広がっている。フランジの塑性域はそり応力と曲げ応力の合成応力により生じ、圧縮側と引張側では非対称に広がっていることが分かる。

5. おわりに

曲げモーメントにより生じる塑性域をもつ矩形断面はり、及び曲げ、曲げねじりモーメントにより生じる塑性域をもつI形断面はりの剛性マトリクスを誘導し、数値計算例を示した。曲げを受けるはりに関する剛性マトリクスは、本研究では補仮想仕事の原理を適用して求めている。このため要素の変位関数を仮定することなく、剛性の低下を考慮した剛性マトリクスを誘導することが可能となった。曲げ及び曲げねじりを受けるはりに関する剛性マトリクスは、3. 2でも触れたが部材両端における曲げねじりモーメントのつり合いが成り立たないので、補仮想仕事の原理を適用することができず、代わりに伝達マトリクス法を応用して定式化を試みた。従ってマトリクスを順次掛けていくことによる誤差の集積といった欠点があるものの、塑性域の広がりをもつ区間のみ適用されるので、この欠点はそれほど問題ないと思われる。

参考文献

- 1) 平沢秀之、林川俊郎、佐藤浩一：断面2次モーメントの減少を考慮した骨組構造の非線形解析、土木学会北海道支部論文報告集、第50号、pp. 16-19, 1994.
- 2) 平沢秀之、林川俊郎、佐藤浩一：塑性域の広がりを考慮したはりの一弾塑性解析、構造工学論文集Vol.41A, pp. 1-8, 1995.
- 3) 平沢秀之、林川俊郎、佐藤浩一：曲げと曲げねじりによるI形断面部材の相関曲線と塑性域、鋼構造年次論文報告集第3巻、pp. 349-354, 1995.
- 4) V. Z. ウラソーフ(奥村敏恵、外共訳)：薄肉弾性ばりの理論、技報堂、1967.
- 5) 中井博、事口寿男：伝達マトリクス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力、変形量に関する研究、土木学会論文報告集No.233, pp. 55-70, 1975.

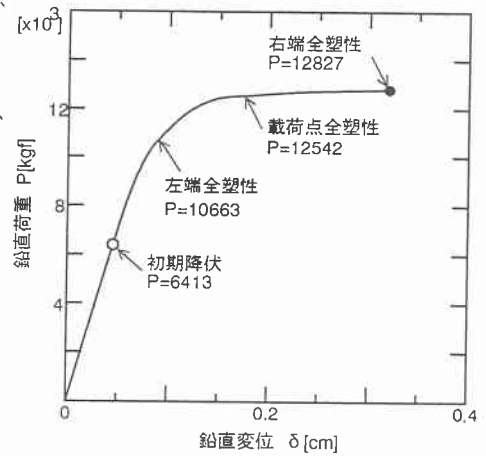


図-7 荷重変位曲線

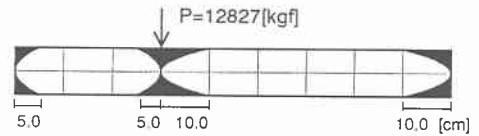


図-8 塑性域の広がり

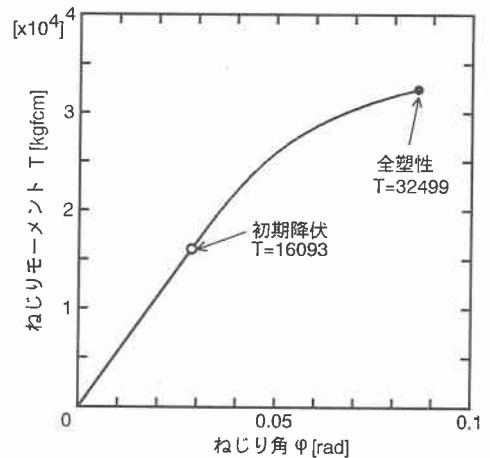


図-9 荷重変位曲線

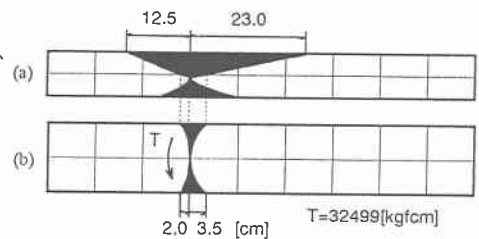


図-10 塑性域の広がり