

I-14

軸力の影響を考慮した平面構造物の塑性域について

北海道大学工学部 学生員 石川 浩希  
 北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之  
 北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎  
 北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. まえがき

平面骨組構造物の弾塑性挙動を解析する際に、その崩壊までの過程は弾塑性有限要素解析の方法では、ひずみエネルギーを数値積分するために、骨組構造物を十分な要素に分割しなければならない。一方、一部材一要素として解析できる塑性ヒンジの概念を導入した塑性解析法では、荷重段階によって塑性ヒンジの形成順序や構造物の変形が組織的に算定でき、崩壊荷重を比較的精度よく求めることが可能である。しかしこの方法では塑性域の広がりを見逃しているため、部材の剛性を過大に評価していることになる。そこで本論文では塑性ヒンジ近傍の弾塑性境界を解析的に求め、塑性域の広がりに伴う部材剛性の低下を考慮しつつ、補仮想仕事の原理により部材要素の荷重-変位関係を誘導する。さらにこの解析法を用いて平面構造物に適用させた2、3の計算例を示すこととする。

2. 解析手法<sup>1)</sup>

2.1 仮定

解析において対象となる材料は完全弾塑性体とする。崩壊は材料の塑性化によってのみ生じるものとし、座屈等の現象は生じないものとする。部材の降伏は軸力と曲げモーメントによって起こるものとし、せん断力による影響は無視する。

2.2  $m-n$  相関曲線

幅  $b$ 、高さ  $h$  の矩形断面を持つ部材両端に、Fig. 1 のように軸力、せん断力、曲げモーメントが作用するものとする。部材内の任意の断面での応力分布の形状はFig. 2で示すように8通りに分類することができる。これらの分布から全塑性曲げモーメント  $M_0$ 、全塑性軸力  $N_0$  で除することによって無次元化した  $m, n$  が式(1)~(4)のように求められる。

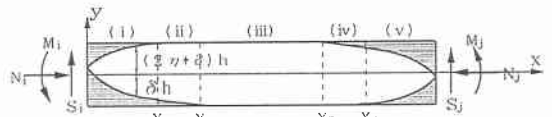


Fig. 1 断面力と塑性域

$$\textcircled{1} \quad : m = \frac{1}{3(\eta - \delta)}, \quad n = \frac{2\eta}{2(\eta - \delta)} \quad (1a, b)$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5} \quad : m = \frac{2(1+\delta)(1/2-\delta)^2}{3(\eta - \delta)}, \quad n = 1 - \frac{(1/2-\delta)^2}{2(\eta - \delta)} \quad (2a, b)$$

$$\textcircled{6}\textcircled{7} \quad : m = 1 - \frac{4}{3}\delta^2 + \frac{8}{3}\delta\eta - \frac{16}{3}\eta^2, \quad n = 2\eta \quad (3a, b)$$

$$\textcircled{8} \quad : m = 1 - 4\eta^2, \quad n = 2\eta \quad (4a, b)$$

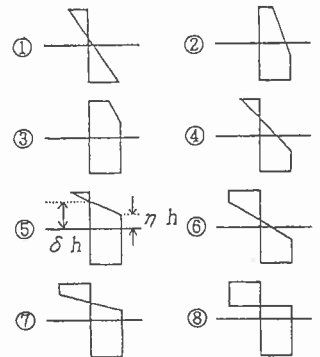


Fig. 2 応力分布

Spread of Plasticity of Plane Frame Structure Considering Influence of Axial Force  
 by Hiroki ISHIKAWA, Hideyuki HIRASAWA, Toshiro HAYASHIKAWA and Koichi SATO

式(1)~(4)について  $n$  を横軸に  $m$  を縦軸において  $m$  と  $n$  に関する相関曲線を描くと Fig. 3 のように表される。図中の領域①~⑧は Fig. 2 の応力分布図①~⑧に対応している。

### 2.3 剛性方程式

部材の剛性の低下による影響を考慮して修正を行った剛性マトリックスを導く。剛性マトリックスの誘導の際には、応力分布により求められた  $m$ 、 $n$  に式(5)によって表される部材端部から  $x$  の距離における曲げモーメント  $M_x$ 、軸力  $N_x$  を代入することにより、 $x$  における弾塑性境界  $\delta$  を得ることができる。

$$M_x = M_i - S_i x, \quad N_x = N_i \quad (5a, b)$$

式(5)と式(2)、(3)を用いて  $\delta$  を導くと式(6)、(7)のようになる。

$$\text{式(2)より} \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{N_i}{N_0} - \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left[ \frac{N_i}{N_0} \right]^2} \quad (6)$$

$$\text{式(3)より} \quad \delta = \frac{3m}{4(1-n)} - 1 \quad (7)$$

ここで  $(2\eta + \delta)h = h/2$ 、 $\delta h = -h/2$  とおくとき Fig. 1 における部材上下端部での弾塑性境界の位置  $x_1 \sim x_4$  が導かれる。

$$x_1 = \frac{M_0}{S_i} \left\{ \frac{M_i}{M_0} - \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{N_i}{N_0} \right] \left[ 1 + 2 \frac{N_i}{N_0} \right] \right\} \quad (8)$$

$$x_2 = \frac{M_0}{S_i} \left\{ \frac{M_i}{M_0} - \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{N_i}{N_0} \right] \right\} \quad (9)$$

$$x_3 = \frac{M_0}{S_i} \left\{ \frac{M_i}{M_0} + \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{N_i}{N_0} \right] \right\} \quad (10)$$

$$x_4 = \frac{M_0}{S_i} \left\{ \frac{M_i}{M_0} + \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{N_i}{N_0} \right] \left[ 1 + 2 \frac{N_i}{N_0} \right] \right\} \quad (11)$$

部材内において弾性範囲内の剛性のみを考慮した場合、断面は変断面とみなせるので領域(i)~(v)での断面2次モーメント  $I_i \sim I_v$  及び断面積  $A_i \sim A_v$  は次式のようになる。

$$I_i, I_v = \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left\{ \frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left[ \frac{N_i}{N_0} \right]^2 \right\}^{3/2}, \quad A_i, A_v = \sqrt{3}bh \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left[ \frac{N_i}{N_0} \right]^2} \quad (12a, b)$$

$$I_{ii}, I_{iv} = \frac{bh^3}{12} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3N_0(M_i - S_i x)}{4M_0(N_0 - N_i)} \right\}^3, \quad A_{ii}, A_{iv} = bh \left[ \frac{3}{2} - \frac{3N_0(M_i - S_i x)}{4M_0(N_0 - N_i)} \right] \quad (13a, b)$$

$$I_{iii} = \frac{bh^3}{12}, \quad A_{iii} = bh \quad (14a, b)$$

次に部材要素の剛性方程式は補仮想仕事の原理を適用することにより定式化する<sup>2)</sup>。今、 $\delta S_i$ 、 $\delta S_j$ 、 $\delta M_i$ 、

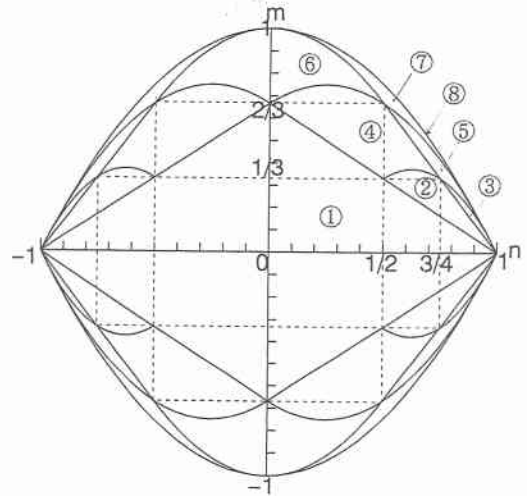


Fig. 3  $m-n$ 相関曲線

$\delta M_i, \delta N_i, \delta N_j$ をそれぞれ部材両端の節点  $i, j$ における仮想せん断力、仮想曲げモーメント、仮想軸力とし、 $v_i, v_j, \theta_i, \theta_j, u_i, u_j$ をそれぞれ節点変位とすると、仮想外力による補仮想仕事  $\delta W$  は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \delta W &= v_i \delta S_i + \theta_i \delta M_i + u_i \delta N_i + v_j \delta S_j + \theta_j \delta M_j + u_j \delta N_j \\ &= \delta S_i (v_i - v_j + l \theta_j) + \delta M_i (\theta_i - \theta_j) + \delta N_i (u_i - u_j) \\ &= [\delta S_i \quad \delta M_i \quad \delta N_i] \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} v_i \\ \theta_i \\ u_i \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} -1 & l & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} v_j \\ \theta_j \\ u_j \end{array} \right\} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)は次式で表されるつり合い条件式を用いている。

$$M_i = -M_i + S_i l \quad S_j = -S_i \quad N_j = -N_i \quad (16)$$

一方、内力による補仮想仕事  $\delta V$  は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{EI_x} dx + \int_0^l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} dx \\ &= \int_0^l [-\delta S_i x + \delta M_i] [EI_x]^{-1} [-S_i x + M_i] dx + \int_0^l [\delta N_i] [EA_x]^{-1} [N_i] dx \\ &= [\delta S_i \quad \delta M_i \quad \delta N_i] \left[ \begin{array}{ccc} \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx & -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx & 0 \\ -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx & \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^l \frac{1}{EA_x} dx \end{array} \right] \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ N_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

補仮想仕事の原理は

$$\delta W = \delta V \quad (18)$$

であるから、(16)、(17)式より

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ N_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ u_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & l & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここで

$$a = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx, \quad c = -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx, \quad d = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx, \quad e = \int_0^l \frac{1}{EA_x} dx \quad (20 a, b, c, d)$$

とおいた。よって、剛性方程式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ N_i \\ S_j \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/D & -c/D & 0 & -d/D & (d+c)/D & 0 \\ -c/D & a/D & 0 & c/D & (-c/a)/D & 0 \\ 0 & 0 & 1/e & 0 & 0 & -1/e \\ -d/D & c/D & 0 & d/D & (-d/c)/D & 0 \\ (d+c)/D & (-c/a)/D & 0 & (-d/c)/D & F/D & 0 \\ 0 & 0 & -1/e & 0 & 0 & 1/e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ u_i \\ v_j \\ \theta_j \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 $D=ad-c^2$ 、 $F=d l^2+2c l+a$ とおいた。

### 3. 解析例

2.で述べた解析手法をもとに、50mm×24mmなる矩形断面をもつFig.4(a)、5(a)のような一層ラーメン、2層ラーメンに水平、鉛直方向にそれぞれ比例荷重を載荷させ、荷重増分法を用いることによって計算を行った。この結果、崩壊荷重はFig.4ではP=4296kgf、Fig.5ではP=4088kgfという値が得られ、そのときの崩壊機構の様子はFig.4(b)、5(b)ようになる。またFig.4(b)、5(b)の①～⑥は塑性ヒンジの発生順序である。Fig.6、7では荷重P(kgf)と変位δ(cm)の関係をFig.4では節点番号3に、Fig.5では節点番

号4に着目してそれぞれに対し水平変位、鉛直変位を求めた。荷重を増加させることにより一層ラーメンの節点番号3においては $P=2772\text{kgf}$ の時、二層ラーメンでは $P=3040\text{kgf}$ の時に降伏応力に達する。その後塑性域が拡大していき、一層ラーメンでは $P=4108\text{kgf}$ 、二層ラーメンでは $P=4088\text{kgf}$ に達すると部材全断面が降伏応力に到達し、塑性ヒンジが形成される。二層ラーメンではこの時点で崩壊機構に達するが、一層ラーメンではまだ達していないため荷重増加が進み、Fig. 4 (b)のように④の塑性ヒンジが形成されるまで荷重に抵抗する。Fig. 8、9は崩壊荷重に達した時の塑性域の広がりを示した図である。曲げモーメントと軸力の影響により、境界線は放物線と直線部によって描かれる。

#### 4. あとがき

本解析手法によって崩壊機構の数が多くなり、崩壊荷重が容易には求めることのできない高次の不静定構造物でも、崩壊までの塑性ヒンジの発生の様子をしながら崩壊荷重が計算できた。また、弾塑性境界は断面の応力分布により定式化された式によって単一の線によって表すことが可能であり、メッシュ分割による粗さの影響はない。これらの解析では材料を完全弾塑性体として仮定したが、今後は、ひずみ硬化型の材料についてバイリニア型の応力-ひずみ関係としてモデル化することにより、解析を行う予定である。

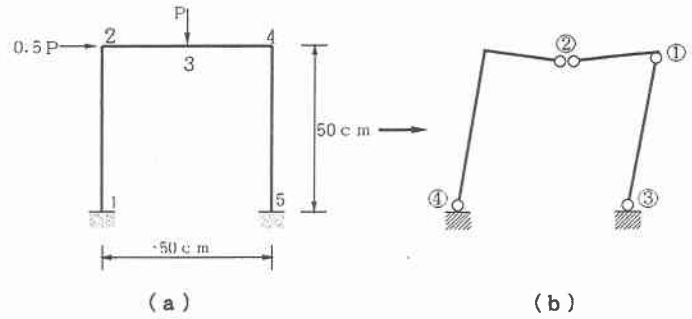


Fig. 4 一層ラーメン

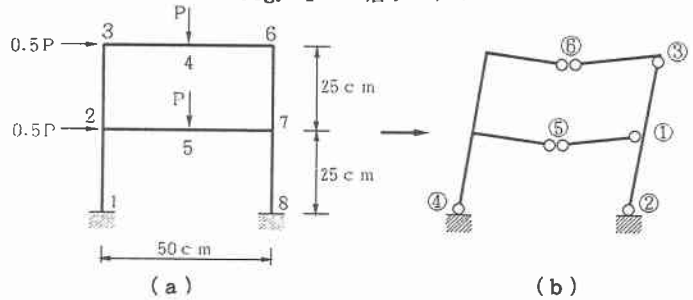


Fig. 5 二層ラーメン

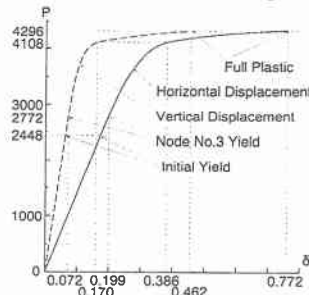


Fig. 6 荷重変位曲線

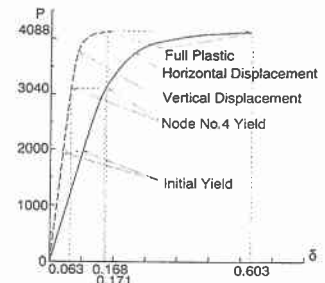


Fig. 7 荷重変位曲線

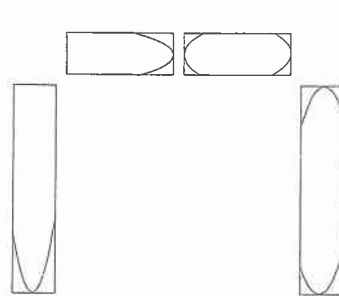


Fig. 8 塑性域の広がり

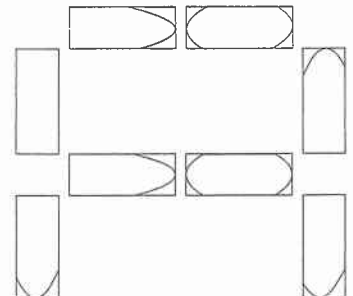


Fig. 9 塑性域の広がり

《参考文献》 1)平沢秀之、阿久津稔和、林川俊郎、佐藤浩一：曲げと軸力を受ける平面構造物の弾塑性解析、土木学会北海道支部論文報告集、1995。 2)平沢秀之、林川俊郎、佐藤浩一：塑性域の広がりを考慮したはりの一弾塑性解析、土木学会構造工学論文集、Vol.41A、1995。 3)田中尚：構造物の極限解析、建築構造学大系 9、彰国社