

II-62

平面波動場の解析について

北海道東海大学工学部 正員 浜中建一郎
北海道東海大学工学部 山鹿 知樹

1. まえがき

港内静穏度をGreenの公式を用いて解析する方法について述べる。水深一定で、垂直壁で区切られた領域を仮定すると、Helmholtz方程式で記述される平面波動場の問題に帰着する。この問題をGreenの公式で解くための基本的な考えは多くの論文にすでに述べられているが、種々の境界条件の扱いに関してはまだ良く検討されていない。このことから本研究では特に、新たに開放境界条件を提案し、その妥当性を述べると併に入射境界条件や部分反射条件にも応用出来ることを示す。

2. 平面波動場の基礎方程式とHelmholtz方程式

流れを非圧縮、非粘性、非回転と仮定し、流体内部でLaplaceの方程式を満たす速度ポテンシャル Φ を仮定し水面での境界条件を線形化する。今、現象は時間的について周期的と仮定しその角周波数を ω とし g を重力加速度とする。全ての変量を ω と g で無次元化する。有次元量を $\hat{\quad}$ をつけて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \hat{\omega}^2 / \hat{g} \\ (\eta, h) &= (\hat{\eta}, \hat{h}) \hat{\omega}^2 / \hat{g} \\ t &= \hat{\omega} t \\ \phi &= \hat{\phi} \hat{\omega}^3 / \hat{g}^2 \end{aligned}$$

速度ポテンシャルを以下の様に表すと

$$\Phi = \text{Re}(\phi e^{-it})$$

Laplaceの方程式と境界条件は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & (z = -h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \phi &= 0 & (z = 0) \end{aligned}$$

(1) を解くため ϕ を以下のように仮定すると

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_s(x, y) Z(z) \\ &= \phi_s(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{aligned} \quad (2)$$

底面の境界条件を満たし、水面の境界条件から

$$k \tanh kh = 1$$

(2) を (1) に代入すると

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} + k^2 \phi_s = 0 \quad (3)$$

ここで波数を k とする

(3) 式はHelmholtz方程式と呼ばれ、平面波動場の基礎方程式となっている。従って問題は平面的な境界条件(例えば防波堤や岸壁)のもとでHelmholtz方程式を解くことに帰着する。

3. Helmholtz方程式とGreenの公式

今、考えている領域を V 、その境界を S として二つの関数 ϕ と G が2階微分可能であればGreenの公式が成立し

$$\int_V (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dv = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4)$$

ただし $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 、 v は外に向かう法線ベクトルである。

(4) の主要解を求めるため(4)を変形して

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \phi (\Delta G + k^2 G) - G (\Delta \phi + k^2 \phi) \right\} dv \\ = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \end{aligned} \quad (5)$$

ϕ が(3)の解で G が(5)の主要解であるとする G は

$$\Delta G + k^2 G = \alpha \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (6)$$

であることが要請され(6)を満たす解は (x_0, y_0) を特異点とする(3)の解であると考えられる。

(6)の解を求めるために(3)を円柱座標で表示

Analysis of plane waves

by Ken-ichiro HAMANAKA and Tomoki YAMAKA

すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} + k^2 \phi_s = 0 \quad (7)$$

ϕ_s を原点の回りでFourier級数に展開して

$$\phi_s = \sum_m R_m(r) e^{im\theta} \quad (8)$$

(8)を(7)に代入すると

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0 \quad (9)$$

これはm次のBessel方程式である。

(9)の一般解は

$$R_m(r) = C_m H_m^{(1)}(kr) + D_m H_m^{(2)}(kr) \quad (10)$$

ここで $H_m^{(1)}$ 、 $H_m^{(2)}$ はそれぞれm次の第1種、第2種Hankel関数である。

kr が十分大きなき

$$H_m^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left\{ i \left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (11)$$

$$H_m^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left\{ -i \left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (12)$$

となり $H_m^{(1)}$ は外に広がる波、 $H_m^{(2)}$ は中心に集まる波を表す主要解を(9)の方向によらぬ解と考えると $m=0$ で(11)も(12)も共に $r=0$ が特異点になっており、いずれも主要解になるが $H_0^{(1)}(kr)$ は遠方での放射条件を満たすので、ここでは(11)を選ぶ。

それを $G(r)$ で表すと

$$G = H_0^{(1)}(kr) \quad (13)$$

Hankel関数をBessel関数とNeumann関数とで表すと

(13)は

$$G = J_0(kr) + iN_0(kr) \quad (14)$$

次に(14)が(3)の主要解であることをたしかめる。(14)のNeumann関数は $r=0$ で特異性を持つから、原点を中心とする半径 ε の小円の領域を除いた領域で(5)を考える。 ϕ として(3)のHelmholtz方程式を満たす解 ϕ_s をとり G を(14)とすると G も小円を除いた領域では(3)を満たす

から(5)の左辺は消えさらに境界を元々の S と小円上の S_0 と考えると(5)は

$$\int_{S_0} \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v} \right) ds_0 + \int_S \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v} \right) ds = 0 \quad (15)$$

となる。

(15)の左辺の第1項の積分でポテンシャル ϕ_s が十分滑らかな関数であることを仮定すると、小円 S_0 上では ϕ_s と $\partial \phi_s / \partial v$ はconstantと見て良いから積分の外にでる。従って積分は G に関するものだけとなり $r = \varepsilon$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_0} \frac{\partial G}{\partial v} ds_0 = -4i \quad (16)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_0} G ds_0 = 0 \quad (17)$$

(16)と(17)から(15)は特異点が領域内部にあるときは

$$4i\phi_s(P) = \int_S \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v} \right) ds \quad (18)$$

特異点が境界上にあるときは積分範囲が $0 \rightarrow \pi$ となるから

$$2i\phi_s(P) = \int_S \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v} \right) ds \quad (19)$$

これでHelmholtz方程式に対するGreenのIdentity theorem(18)、(19)が導け、このことから $H_0^{(1)}(kr)$ がHelmholtz方程式の主要解であることが解る。

4. 港内静穏と解析における境界条件

4.1 完全反射境界

消波構造物のない岸壁や防波堤では波は完全反射すると仮定して良いだろう。そのとき、境界面の法線方向の流速は0であるから

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad (20)$$

4.2 開放境界

防波堤等に切りかき部があり問題としている領域から波が自由に出ていき再び入射してこないと考えられる領域があるとき、その境界を開放境界と呼ぶ。開放境界に対する境界条件を考えるために、図1の様に直線でしきられた半無限領域を問題としている領域の外側に考え、それを外領域と呼び問題として

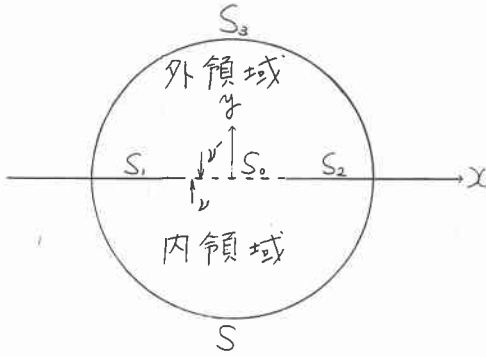


図1 領域・境界概念図

いる領域を必要に応じ内領域と呼ぶ。今、外領域に対しGreen関数としてHankel関数を用いて内領域とは別にGreenの公式を適用してみる。

外領域内の一点Pについて(18)を考え外領域の内から外に向かう法線ベクトルを v' で表す

$$4i\phi_s(P) = \iint_S \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v'} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v'} \right) ds \quad (21)$$

P点が図の S_0 上であれば(19)から

$$2i\phi_s(P) = \iint_S \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial v'} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial v'} \right) ds \quad (22)$$

仮想 S_1 および S_2 上での積分はP点が S_0 上にあるから

$$\frac{\partial G}{\partial v'} = 0 \quad (23)$$

また完全反射として

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial v'} = 0 \quad (24)$$

境界 S_3 が S_0 から十分遠方にあると考えると ϕ_s もGも放射条件を満たすから境界上の積分は0になる。従って(22)は

$$2i\phi_s(P) = -\int_{S_0} \left(G \frac{\partial \phi_s}{\partial v'} \right) ds = \int_{S_0} \left(G \frac{\partial \phi_s}{\partial v} \right) ds \quad (25)$$

となり、 S_0 上の積分だけで表現される。ただし v と v' は逆向きだから $\partial/\partial v' = -\partial/\partial v$ を用いる。結局 S_0 上にはセグメントの数だけ未知量 ϕ_s と $\partial \phi_s/\partial v'$ を配置し、内領域には通常のGreenの公式を適用し、外領域に対しては(25)を適用すれば未知量の数と方程式の数が一致し解ける。

4. 3入射境界

入射波の条件による境界を入射境界と呼ぶ。一般に入射境界を通して考えている領域内に波は伝播するが、領域内の構造物や他の境界で反射した波の一部は又入射境界に戻ってくる。この波は入射境界を通して自由に領域外に出て行く必要がある。そのためには外に出ていく成分の ϕ と $\partial \phi/\partial v$ を未知量としておき、それに対して開放境界条件を適用すれば良い。

4. 4部分反射境界

消波岸壁等では一般には波は完全には消波せず、その一部分には反射する。このような境界を部分反射境界と呼ぶ。部分反射境界に対して、妥当な境界条件はまだ提案されていない。ここでは4.2で述べた開放境界条件を利用して部分反射境界条件を与える方法を述べる。部分反射境界では、領域内から外へ向かう波 ϕ_1 、 $\partial \phi_1/\partial v$ と外から内へ向かう波 ϕ_R 、 $\partial \phi_R/\partial v$ を未知量とする。

(i) $\phi = \phi_1 + \phi_R$, $\partial \phi/\partial v = \partial \phi_1/\partial v + \partial \phi_R/\partial v$ に対し領域内で通常のGreenの公式を適用する。

(ii) ϕ_1 と $\partial \phi_1/\partial v$ に対し開放境界条件を適用する。

(iii) 次節での考察から、もしここが完全反射境界であれば外から内へ向かう波のポテンシャルは ϕ_1 と $-\partial \phi_1/\partial v$ である。従って、反射率を r とすると
 $\phi_R = r\phi_1$, $\partial \phi_R/\partial v = -\partial \phi_1/\partial v$ となる。

以上(i)(ii)(iii)で与えられた4本の条件により4個の未知量が決定される。

5. 開放境界条件の検討

図1の様に半無限の防波堤 S_1 、 S_2 および開口部 S_0 でしきられた領域の $y < 0$ の領域に入射波 ϕ_1 と反射波 ϕ_k が存在し、開口部 S_0 から $y > 0$ の領域に波が回折する。開口部 S_0 に開放境界条件を適用して $y < 0$ の領域の波動場を求める。

S_0 上のP点を中心に十分大きな半径 R で、 $y < 0$ の領域に半円を考え、その内部でGreenの公式を適用する。

Green関数として

$$G = H_0^{(1)}(kr) \quad (26)$$

を用いると S_1 、 S_2 上では $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \nu} = 0$ より

$$2i\phi_s(P) = \int_{S_0} \left(\phi_s \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi_s}{\partial \nu} \right) ds + \int_{S_1} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (27)$$

(27) 式の右辺の第2項を

$$I_s(P) = \int_{S_1} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (28)$$

と書いて、さらに S_0 上では $\frac{\partial G}{\partial \nu} = 0$ であることを考

慮すると (27) 式は

$$2i\phi_s(P) = - \int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds + I_s(P) \quad (29)$$

となる。

一方、 S_0 上に開放境界条件を適用すると (25) 式から

$$2i\phi_s(P) = \int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} ds \quad (30)$$

(29) 式と (30) 式を加えると

$$4i\phi_s(P) = I_s(P) \quad (31)$$

となり、 S_0 上の ϕ は $I_s(P)$ だけで求まる。

次に $I_s(P)$ を考察する。 $y < 0$ の領域で半径 R を十分大きくとれば、開口部から境界 S への回折波は放射条件を満たし、(28) 式の積分では無視出来、 $I_s(P)$ は入射波と反射波だけで決まる。このことは (27) 式において開口部 S_0 を閉じた場合の $I_s(P)$ と同じであることを意味する。このとき (27) 式の左辺の $\phi(P)$ は完全反射壁上の ϕ となるからそれによって逆に $I_s(P)$ が定まることとなる。

今、入射波と反射波を

$$\phi_i = e^{ikx} = e^{i(kx+my)}, \quad \phi_k = e^{ik^*x} = e^{i(kx-my)} \quad (32)$$

とすると、反射壁の P 点 ($x_0, 0$) では

$$\phi_s(P) = \phi_i(P) + \phi_k(P) = 2e^{ikx_0} \quad (33)$$

だから $I_s(P)$ は (27) 式より

$$I_s(P) = 4ie^{ikx_0} \quad (34)$$

従って (32) 式から開口部の P 点では

$$\phi_s(P) = e^{ikx_0} \quad (35)$$

すなわち開口部上のポテンシャルは入射波のポテンシャルと一致していることが分かる。また水位はポテンシャルから以下の様に表されるから

$$\eta = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (36)$$

開口部の水位が入射波の水位と一致していなければならないことも分かる。このことは実験でも確かめられていることから (35) 式の妥当性は確かめられる。

以上の結果は開口部に (32) 式で与えられる開放境界条件を適用したことにより得られたことから本研究で提案する開放境界条件の妥当性を確かめることになる。また開口部での流速は入射波のそれとは一致しないことは以下の計算例で確かめられる。

6. 計算例

この節では前節までに述べた開放境界条件の妥当性を示すための計算例のついて述べる。以下に示す図は全て得られたポテンシャルの実部であるが、虚部についても同様である。またポテンシャルの値は (36) 式の意味で水位を表すから以下では必要に応じ水位あるいは (水面) 波形とも呼ぶ。

図2は開口部で入射波 ϕ と $\partial \phi / \partial \nu$ を与え Green の公式を用いて求めた回折波の波形である。入射波は開口部に対して垂直である。開口部から離れた位置では妥当そうに見えるが開口部では大きく歪んで実際とは異なる。これは開口部で入射波の $\partial \phi / \partial \nu$ を与えたことによる。図3は (25) 式の開放境界条件から $\partial \phi / \partial \nu$ を求めた後求めた回折波である。開口部での水位の歪みはなくなり開放境界条件の妥当性を示している。図4は直線防波堤と中央の開口部で仕切られた下半分が入射波領域で上半分が回折波領域である。入射角は開口部に向かって左手 45° である。入射波領域と回折波領域は滑らかに接続しており解の妥当性を示している。また、開口部から反射波のないことによる影響は右手 45° の方向に現れている。このことをより明確にするため入射波を除去した波形が図5である。さらに図6は逆に右手 45° の方向から入射した場合の波形であり図7は入射波を除去した波形である。図4、図5と同様妥当な解が得られている。

又、図示はしていないが複数の波が入射した場合も本研究で提案した開放境界条件で妥当な解を得ることが出来る。

7. 結論

(1) Helmholtzを基礎方程式とする平面波動場をGreenの公式を用いて解く場合の主要解とそれを用いたGreenの積分方程式の導出について述べた。

(2) 平面波動場、特に港内静穏度解析に必要な種々の境界条件を導いた。

(3) 上記の境界条件のうち、開放境界条件では入射波の入射角に依存せず、複数の入射波あるいは円筒波に対しても適用される。

(4) この開放境界条件を利用して、入射境界条件と部分反射境界条件を導いた。

時間発展形の基礎方程式を用いた数値計算がある。その際常に問題となるのが開放境界である。現在提案されている開放境界に対する方法は大きく分けてふたつあり、計算領域の外側に強い人工粘性を与える消波領域を設ける方法と何らかの方法で入射波の入射角を推定し、それに適合するスキームを与える方法とである。しかしながら前者では完全に消波することは不可能であり、後者では複数の波や円筒波が入射する場合には適用出来ない。本研究で提案する方法は上記のどちらの問題も克服しており、優れた方法と言える。今後時間発展形の数値計算への応用を考えていきたい。

波動場の数値解析で良く用いられる他の方法として

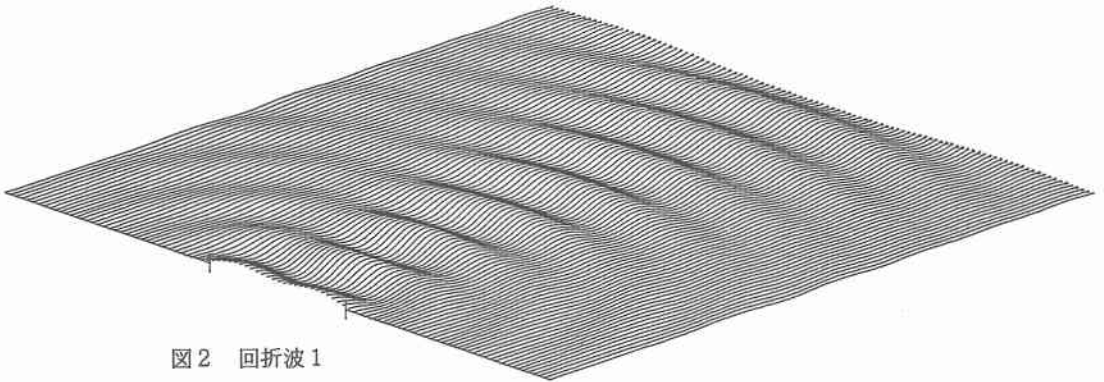


図2 回折波1

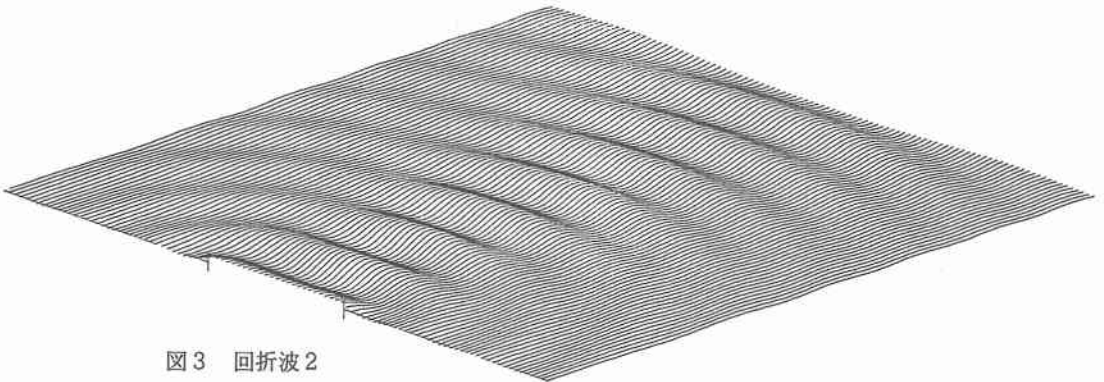


図3 回折波2

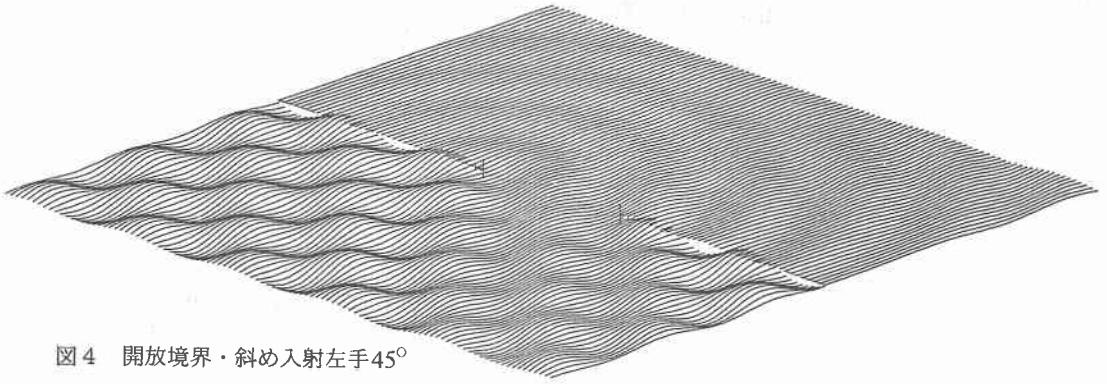


図4 開放境界・斜め入射左手 45°

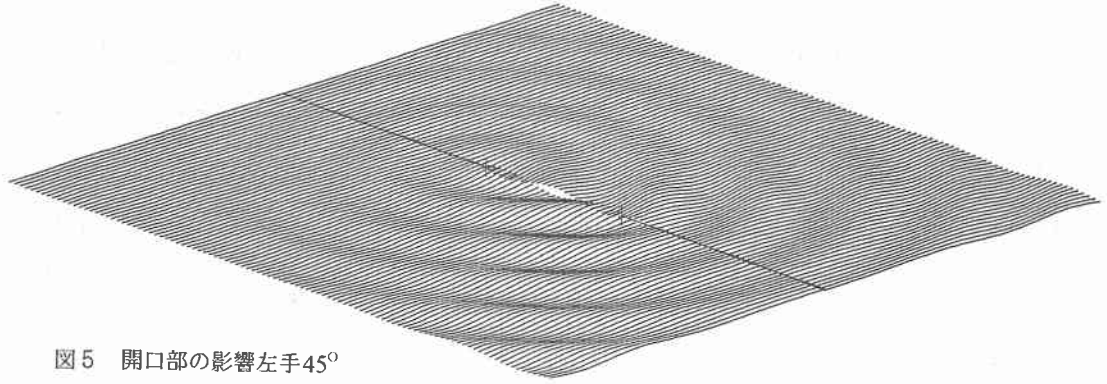


図5 開口部の影響左手 45°

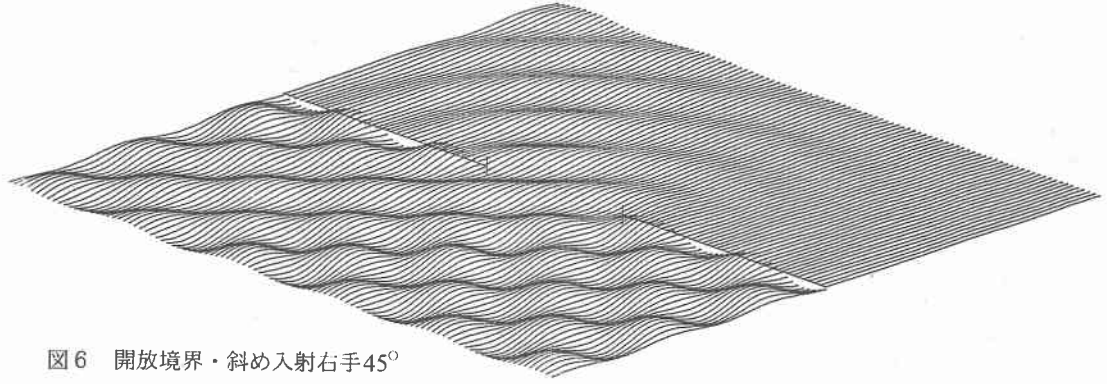


図6 開放境界・斜め入射右手 45°

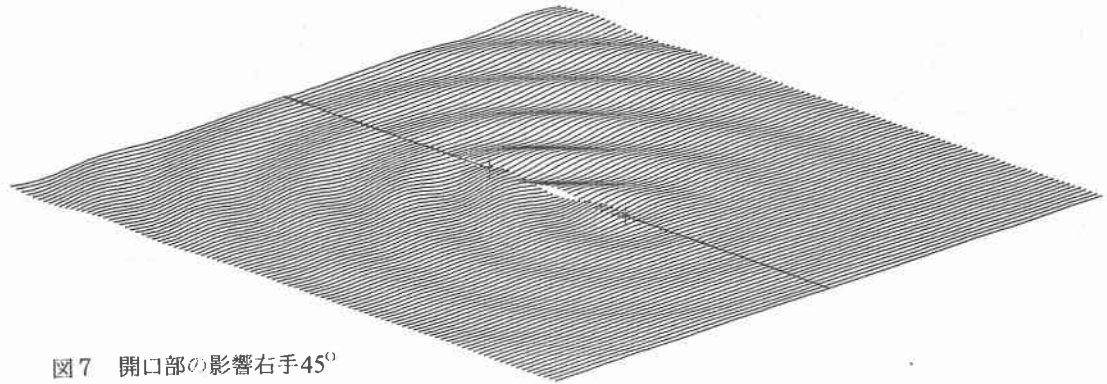


図7 開口部の影響右手 45°