II－57

波状底面上の有限振幅波に関する理論的研究

北海道大学　工学部　　　　平井　誠
北海道大学　工学部　正　員　森　明巨
北海道大学　工学部　正　員　板倉　忠興

本研究では有限波高をもった河床擾乱が流れに及ぼす効果を水面形に合わせた座標形を用いて解析した。

1．基礎方程式（テンソル方程式）の誘導

基礎方程式は(1-1)～(1-3)式である（テンソルは慣用のものをもちいる）。

連続式　：$\dfrac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,\mathrm{v}^i)_{,i}=0$ (1-1)

運動方程式　：$\mathrm{v}^j\mathrm{v}^i{}_{,j}+\left\{ {i \atop j\,k} \right\}\mathrm{v}^j\mathrm{v}^k=-g^{ij}\mathrm{p}_{,j}$ (1-2)

非回転の条件　：$\mathrm{v}_{i,j}=\mathrm{v}_{j,i}$ (1-3)

ここに、$p=\tilde{p}/\rho+gz$　、$\tilde{p}$　：圧力、ρ　：密度、g　：重力の加速度。

Cartecian座標系y^i　、水面に合わせた座標系x^i　の関係を

$$y^1=\lambda x^1\ ,\quad y^2=x^2\ ,\quad y^3=hx^3+\eta$$

で与える。ここに、$i=1$　：流下方向、2　：横断方向、3　：鉛直上向き方向、h　：水深、λ　：x　方向の特性長、η　：河床高である．以下では簡単のため　$x^1=x$　、$x^3=z$　と書き　y^2　方向に場は一様として、(1-1)～(1-3)式を書き換えると

連続式　：　$(h\mathrm{v}^1)_{,1}+h\mathrm{v}^3{}_{,3}=0$ (1-4)

運動方程式

x　方向　：$\mathrm{v}^j\mathrm{v}^1{}_{,j}=-\dfrac{1}{\lambda^2}p_{,1}+\dfrac{\eta_{,1}+h_{,1}z}{\lambda^2 h}p_{,3}$ (1-5)

z　方向　：$\mathrm{v}^j\mathrm{v}^3{}_{,j}+\dfrac{\eta_{,11}+h_{,11}z}{h}\mathrm{v}^1\mathrm{v}^1+2\dfrac{h_{,1}}{h}\mathrm{v}^1\mathrm{v}^3$

$$=-\left[\frac{1}{h^2}+\left(\frac{\eta_{,1}+h_{,1}z}{\lambda h}\right)^2\right]p_{,3}+\frac{\eta_{,1}+h_{,1}z}{\lambda^2 h}p_{,1}$$

非回転の条件：$[\{\lambda^2+(\eta_{,1}+h_{,1}z)^2\}v^1]_{,3}+[(\eta_{,1}+h_{,1}z)\,h\mathrm{v}^3]_{,3}$ (1-6)

$=[(\eta_{,1}+h_{,1}z)\,h\mathrm{v}^1]_{,1}+[h^2\mathrm{v}^3]_{,1}$ (1-7)

境界条件は、

$\mathrm{v}^3=0$　at　$z=0$ and 1，$p=g(h+\eta)$　at　$z=1$ (1-8)

Friedrichsの浅水流理論に従ってλ，d　(代表水深, g　を使って諸量を以下のように無次元化する。

$$U=\frac{\lambda}{\sqrt{gd}}\mathrm{v}^1\ ,\quad W=\frac{hd}{\sqrt{gd}\,\lambda}\mathrm{v}^3\ ,\quad H=\frac{h}{d}\ ,\quad P=\frac{p}{gd}\ ,\quad N=\frac{\eta}{d}$$

Theoritical Stady on Fiaite Amplitude Wave in Wavy River Bed
by Makoto Hirai, Akio Mori and Tadaoki Itakura

これらを用いると摂動展開のための基礎方程式は、（但し、使われない4次以上の微小項は予め除く）

① $U_{,3} = \sigma[Q(N_{,1}+H_{,1}z)]_{,1} - \sigma[(N_{,1}+H_{,1}z)^2U]_{,3} + [HW]_{,1}$

② $P_{,3} = -\sigma QU(N_{,11}+H_{,11}z) + \sigma H(N_{,1}+H_{,1}z)P_{,1} - U[HW]_{,1}$

③ $HE_{,1} = (N_{,1}+H_{,1}z)P_{,3}$

④ $Q_{,1} = -\sigma^{-1}W_{,3}$

ここに　$Q = HU$,　$E = \dfrac{U^2}{2} + P$,　$\sigma=(d/\lambda)^2$

境界条件は

$$W=0 \quad at \quad z=0 \ and \ 1, \quad P=H+N \quad at \quad z=1 \tag{1-9}$$

となる。

H,U,W,P を次のようにσ で展開する。

$$X=X_0+\sigma X_1+\sigma^2X_2+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

また、Nは　σ^iN_i (i=0,1,2) として、波形は i次のオーダーまで解析する。

2. $N=N_0$

Q_iがzに依存しない場合には、連続式をz=1～zで積分すると(1-10)式が得られる。

$$Q_{i,1}= 0 \rightarrow Q_i= constant \tag{1-10}$$

σ^{-1}について④から $W_0 = 0$　が得られる。

<u>0次のオーダー</u>

①、②より、(2-1)が得られる。

$$U_0 = U_0(x), \quad P_0 = P_0(x) \tag{2-1}$$

更に、境界条件(1-9)から

$$P_0 = H_0(x) + N_0(x) \tag{2-2}$$

となる。

③からは、

$$E_0 = \frac{U_0^2}{2} + H_0 + N_0 = constant \tag{2-3}$$

が得られる。これは、ベルヌーイ式をあらわす。

④からは、$Q_0 = H_0U_0$　がzに依存しないことから

$$Q_0 = H_0U_0 = constant, \quad W_1 = 0 \tag{2-4}$$

が得られる。

3. $N=\sigma N_1$

<u>0次のオーダー</u>

①～③、境界条件(1-9)から

$$P_0=H_0(x), \qquad E_0=\frac{U_0^2}{2} + H_0 = constant \tag{3-1}$$

が得られる。(2-4)と(3-1)から　H_0 を消去すると

$$D_0= E_0-\frac{Q_0}{U_0} = \frac{U_0^2}{2} \tag{3-2}$$

が得られる。これは、U_0に関する3次方程式であるから、U_0はxの一般的な関数とはならず

$$U_0 = constant \ , \ H_0 = constant \tag{3-3}$$

が得られる。

1次のオーダー

0次と同様にして、①、②から

$$U_1 = U_1(x) \ , \ P_1 = P_1(x) = H_1(x) + N_1(x) \tag{3-4}$$

以下では簡単のために $U_1 = f$, $H_1 = e$ と書くことにする。

③から

$$E_1 = U_0 f + e + N_1 = constant \tag{3-5}$$

④において $Q_1 = H_0 f + eU_0$ がzに依存しないことから

$$Q_1 = H_0 f + eU_0 = constant \ , \ W_2 = 0 \tag{3-6}$$

が得られる。(3-5),(3-6)からe を消去すると、

$$E_1 = \left(U_0 - \frac{H_0}{U_0}\right) f + \frac{Q_1}{U_0} + N_1 = constant \tag{3-7}$$

(3-7)を満たすためには、f はN_1 比例し、

$$U_0 - \frac{H_0}{U_0} = constant \neq 0 \tag{3-8}$$

でなければならない。

4. $N = \sigma^2 N_2$ のときの低次解

0次のオーダー

$N = \sigma N_1$ のときと同様に、

$$U_0 = constant \ , \ H_0 = constant \tag{4-1}$$

1次のオーダー

(4-1)より

$$U_1 = U_1(x) \ , \ P_1 = P_1(x) \tag{4-2}$$

更に(4-2)より

$$E_1 = U_0 f + e = constant \tag{4-3}$$

が得られる。また e を消去すると、

$$D_1 = E_1 - \frac{Q_1}{U_0} = \left(U_0 - \frac{H_0}{U_0}\right) f \tag{4-4}$$

$D_1 = constant$ であるから、fが有意な値を持つためには

$$U_0^2 - H_0 = 0 \qquad 従って \qquad U_0 = \sqrt{H_0} \tag{4-5}$$

これは、有次元の値では $\sqrt{gh}$ となり長波の波速を表す。尚、(3-8)と(4-5)は相反する。このことは、N_1 が1次のオーダーではH_0 がN に依存することを示している。(3-3)からN_1 の影響は$x = \infty$ の上流まで伝わることがわかる。

5. $N = \sigma^2 N_2$ のときの高次解

2次オーダー

2次以上になると①～④式の右辺には0とならないものが現れてくる。Uは深さ方向に分布をもち、

$W_3 \neq 0$で、圧力は非静水圧となり、静水圧近似が成立しなくなる。簡単のために本解析では扱わない３次以上のオーダーの項を①～④から取り除く。

①、②を

$$U_{,3} = \sigma Q H_{,11} z \qquad (5\text{-}1), \qquad P_{,3} = -\sigma U_0 Q H_{,11} z \qquad (5\text{-}2)$$

と書き換えて、次の記号を用いて表す。

$$U_{,3} = \hat{U} z \qquad (5\text{-}3), \qquad P_{,3} = -\hat{P} z \qquad (5\text{-}4)$$

ここで、$\hat{U} = \hat{U}_0 + \sigma \hat{U}_1 + \sigma^2 \hat{U}_2 + \cdots\cdot$

$\hat{P} = \hat{P}_0 + \sigma \hat{P}_1 + \sigma^2 \hat{P}_2 + \cdots\cdot$

と展開すると

$$\hat{U}_0 = \hat{P}_0 = \hat{U}_1 = \hat{P}_1 = 0 \qquad (5\text{-}5)$$

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{P}_2}{U_0} = Q_0 e_{,11} \qquad (5\text{-}6)$$

であり、次の関係が得られる。

$$U_0 \hat{U}_2 - \hat{P}_2 = 0 \qquad (5\text{-}7)$$

$z = 1 \sim z$で積分すると

$$U_2 = U_{s2} + \hat{U}_2 \phi_2 = U_{s2} + Q_0 e_{,11} \phi_2 \qquad (5\text{-}8)$$

$$P_2 = H_2 + N_2 - \hat{P}_2 \phi_2 = H_2 - U_0 Q_0 e_{,11} \phi_2 \qquad (5\text{-}9)$$

ここに、U_s：水面流速、

$$\phi_i = \int_1^z \phi_{i-1} dz \ , \quad \phi_1 = z$$

③においては，右辺＝０から

$$E_{2X} = [U_0 U_2 + P_2 + f^2/2]_{x \to X} = contant \qquad (5\text{-}10)$$

④から

$$-W_3 = H_0 \hat{U}_{2,1} \frac{z(z^2-1)}{6} = H_0 Q_0 \frac{z(z^2-1)}{6} e_{,111} \qquad (5\text{-}11)$$

$$\overline{U}_2 = U_{s2} - \frac{\hat{U}_2}{3} = U_{s2} - \frac{Q_0}{3} e_{,11} \qquad (5\text{-}12)$$

$$\overline{Q}_2 = U_0 H_2 + H_0 U_{s2} - \frac{H_0 \hat{U}_2}{3} + \sum_{j=1}^{i} H_{i-j} \overline{U}_j \qquad (5\text{-}13)$$

以上①～④について得られた関係を２次のオーダーについて整理すると（２次の項は総て左辺におく）Ⅰ～Ⅳとなる．

①→Ⅰ $U_2 - U_{s2} = f_{12}$, $\qquad f_{12} = \hat{U}_2 \phi_2$

②→Ⅱ $P_2 - H_2 - N_2 = f_{22}$, $\qquad f_{22} = -\hat{P}_2 \phi_2$

③→Ⅲ $E_{2X} - U_0 U_2 - P_2 = f_{32}$, $\qquad f_{32} = f^2/2$

④→Ⅳ $H_2 + U_0 U_{s2} - \dfrac{\overline{Q}_2}{U_0} = f_{42}$, $\qquad f_{42} = \dfrac{U_0 \hat{U}_2}{3} - \dfrac{ef}{U_0}$

Ⅰ～Ⅳ式は、E_{iX}，$\overline{Q}_i / U_0$ を $x = X$ でのＨ，Ｕ の値として与えれるものとすれば、未知量は、Ｕ，U_s，Ｐ，Ｈの４つであるから解けることになる。ところが、

$$f_{42} + f_{32} + f_{22} + U_0 f_{12}$$

$$= \frac{U_0 \hat{U}_2}{3} - \frac{ef}{U_0} + \frac{f^2}{2} + (U_0 \hat{U}_2 - \hat{P}_2)\phi_2 = D_2 - N_2 \tag{5-14}$$

$$D_2 = \left[\frac{f^2}{2} - \frac{ef}{U_0}\right]_{x=X}$$

となり、Ⅰ～Ⅳの線形和により２次の変数は取り除かれてしまう。これは非回転の条件を加えたことにより、見かけの未知量U_*が加わったことによる。このため、Ⅰ～Ⅳ式は２次の解を確定しない。その代わり(5-14)式は１次の変数を含み、１次の微分方程式を与えることになる。(5-14)をH_1に関する微分方程式とみると、H_1はzに依存しないから、zを含む項のみからなる方程式　(A)とzを含まない方程式(B)が得られる。

(A)　$$(U_0 \hat{U}_2 - \hat{P}_2)\frac{z^2}{2} = 0$$

(B)　$$\frac{U_0 \hat{U}_2}{3} - \frac{ef}{U_0} + f^2/2 - \frac{1}{2}(U_0 \hat{U}_2 - \hat{P}_2) = D_2 - N_2$$

このとき、(A)式が満たされているのは、(5-7)より直ちにわかる。(B)式からはKdV方程式が得られる。

$$\frac{Q_0 H_0}{3} f_{,11} - \frac{3}{2} f^2 + \frac{Q_1}{U_0^2} f = -D_2 + N_2 \tag{5-15}$$

ここで、

$$N_2 = A\,(f - f_X) \tag{5-16}$$

とおく。f が孤立波解の場合には解析解が得られる。また、

$$f = f_X - \zeta\ ,\quad 3f_X - \frac{Q_1}{U_0^2} + A = l \tag{5-17}$$

とおくと

$$Q_0 H_0 \zeta_{,11} - \frac{9}{2}\zeta^2 - 3l\zeta = 0 \tag{5-18}$$

となる。これに$\zeta_{,1}$ をかけて積分すると、

$$Q_0 H_0 \zeta_{,1}{}^2 - 3\zeta^3 - 3l\zeta^2 = G \tag{5-19}$$

いま孤立波の場合を考えて　$|X| \to \infty$ とすると$G = 0$ となり、上式の解は

$$\zeta = l\ \mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3l}{4Q_0 H_0}}\,x \tag{5-20}$$

従って、

$$f = f_\infty - l\ \mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3l}{4Q_0 H_0}}\,x \tag{5-21}$$

となる。

<参考文献>

1)E.V.Laiton:The second approximaion to cnoidal and solitary waves ,j.Fluid Mech.vol.9,1961

2)森 明巨・板倉忠興・森平宏治：水面形に合わせた座標形による孤立波解

3)横道英雄：工学系のためのテンソル解析,技報堂出版,1983