

II-56

側方からの運動量補給による孤立波の変形に関する理論的研究

北海道大学工学部 小原 聖香
 北海道大学工学部 正 員 森 明巨
 北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

水面波の波高は河床の幾何形状に強く依存するが、フルード数が1前後では平坦床でも大きな水面波が発生する。浅水流で最も大きな波高をもつ波は孤立波であるが、孤立波の理論では、フルード数1.25で碎波すると考えられている。しかし、森平らの矩形断面直線水路の実験によると、これ以上のフルード数においても、跳水と乱流境界層の相互干渉によって引き起こされた水路中央に向かう流れが、高波高、非碎波の波状跳水を形成する。本研究は、この現象を理論的に確認するために横断方向からの運動量補給による孤立波の変形を調べたものである。

解析は、E.V.Laitoneの方法と似ているが、本研究では水面に合わせた座標系を用いており、水面において圧力は厳密に大気圧となる。また水面における境界条件の取扱いが容易になる。解析は、連続式、x、z方向の運動方程式、非回転の条件の4本をテンソル方程式で表して摂動展開を行う。なお横断方向の流れの強さは2次オーダーでzには依存しないものとする。

上述の実験には、長さ4m、幅28cmの水路を使用している。水理条件は、勾配 $I = 1/200$ 、流量 $Q = 3.71 (l/s)$ 、上流水深 $h_0 = 1.98 (cm)$ 、上流フルード数 $Fr = 1.53$ であり横断方向の最大流速 $v = 4.5 (cm/s)$ である。

2. 基礎方程式

基礎方程式の誘導は、平井らの報告と同じであるので省略する。ただし河床は平坦床、 $v_2 \neq 0$ である。横断方向の座標系と v_2 、 b の無次元化は

$$y^2 = bx^2, \quad V = \frac{b\lambda}{\sqrt{gd}} v^2, \quad B = \frac{b}{d} \quad \dots\dots\dots(1)$$

h : 水深、 λ : x方向の特性長、 b : y方向の特性長、 d : $|x| \rightarrow \infty$ の水深、 y^i : Cartesian座標系、 x^i : 水面に合った座標系、 $i = 1$: 流下方向、 2 : 横断方向、 3 : 鉛直上向き方向である。河床を $x^3 = 0$ 、水面を $x^3 = 1$ にとる。以下では簡単のため $x^1 = x$ 、 $x^2 = y$ 、 $x^3 = z$ と書く。

摂動展開のための基礎方程式は以下の様に表すことができる。

$$\text{連続式: } Q_{,1} = -\frac{1}{B}HV_{,2} - \sigma^{-1}W_{,3} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x \text{ 方向の運動方程式: } HE_{,1} = -\frac{1}{B}HVU_{,2} - \sigma^{-1}WU_{,3} + H_{,1}zP_{,3} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$z \text{ 方向の運動方程式: } P_{,3} = -U[HW]_{,1} - \frac{1}{B}HVV_{,2} + \sigma^{-1}WW_{,3} \\ - \sigma QUH_{,11}z - \sigma(H_{,1}z)^2P_{,3} + \sigma HH_{,1}zP_{,1} \quad \dots\dots(3)$$

$$\text{非回転の条件: } U_{,3} = \sigma[QH_{,1}]_{,1}z - \sigma[(H_{,1}z)^2U]_{,3} + [HW]_{,1} - H_{,1}[zW]_{,3} \quad \dots(4)$$

Theoretical Study on Solitary Wave Transformation by Lateral Momentum Supply
 by Seika Obara, Akio Mori, Tadaoki Itakura

境界条件は

$$\begin{aligned} W &= 0 & \text{at } z=0 \text{ and } 1 \\ H &= \text{constant} & \text{when } |x| \rightarrow \infty \dots\dots\dots(2) \\ P &= H & \text{at } z=1 \end{aligned}$$

$$\text{ここに } Q=HU, \quad E=\frac{U^2}{2} + P, \quad \sigma=\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \dots\dots\dots(3)$$

このような展開を用いると σ^{-1} について①から $W_0 = 0$ がいえる。

H, U, V, W, P についても、平井らと同様に摂動展開する。

3. 摂動展開

0次のオーダー

連続式を $z=1 \sim z$ で積分すると

$$\int_1^z Q_{i,1} dz + \frac{1}{B} \int_1^z H_{i,j} V_{j,2} dz - W_{i+1}(z) + W_{i+1}(1) dz = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$z=1$ と0で $W=0$ であることと低次では $V=0$ であることを用いると、(5)式が得られる。

$$-W_{i+1}(z) = \int_1^z Q_{i,1} dz, \quad \int_0^1 Q_{i,1} dz = 0 \dots\dots\dots(5)$$

従って Q_i が z に依存しない場合には

$$Q_{i,1} = 0 \rightarrow Q_i = \text{constant} \dots\dots\dots(6)$$

である。このとき(5)式から $W_{i+1} = 0$ となる。

③, ④より

$$U_{0,s} = 0, \quad P_{0,s} = 0 \rightarrow U_0 = U_0(x), \quad P_0 = P_0(x) \dots\dots\dots(7)$$

P に関する境界条件から

$$P_0 = H_0(x) \dots\dots\dots(8)$$

②からは

$$E_0 = \frac{U_0^2}{2} + H_0 = \text{constant} \dots\dots\dots(9)$$

が得られ、①からは、 $Q_0 = H_0 U_0$ が z に依存しないことから

$$Q_0 = H_0 U_0 = \text{constant} \rightarrow W_1 = 0 \dots\dots\dots(10)$$

また(9),(10)式より H_0 を消去すると

$$D_0 = E_0 - \frac{Q_0}{U_0} = \frac{U_0^2}{2} = \text{constant} \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。(11)式は、 U_0 に関する3次方程式であるから、 U_0 は x の一般的な関数とはならず

$$U_0 = \text{constant}, \quad H_0 = \text{constant} \dots\dots\dots(12)$$

1次のオーダー

③, ④より

$$U_1 = U_1(x) \rightarrow P_1 = P_1(x) = H_1(x) \dots\dots\dots(13)$$

以下では簡単のために $U_1 = f, H_1 = e$ と書くことにする。②から(14)式が得られる。

$$E_1 = U_0 f + e = \text{constant} \dots\dots\dots(14)$$

①において $Q_1 = H_0 f + e U_0$ が z に依存しないことから(15)式が得られる。

$$Q_1 = H_0 f + e U_0 = \text{constant} \rightarrow W_2 = 0 \dots\dots\dots(15)$$

また(14),(15)式より e を消去すると

$$D_1 = E_1 - \frac{Q_1}{U_0} = \left(U_0 - \frac{H_0}{U_0} \right) f = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(16)$$

が得られる。f が有意な値を持つためには

$$U_0^2 - H_0 = 0 \quad \rightarrow \quad U_0 = \sqrt{H_0} \quad \dots\dots\dots(17)$$

以上の近似では、①～④の右辺は総て 0 で、 $V_0, V_1=0, W_0, W_1, W_2=0, P_0, P_1$ は静水圧、 U_0, U_1 は深さ方向に一様分布となり、浅水流近似を表す。

高次のオーダー

③、④式より

$$U_{,3} = \hat{U} z + \sigma^3 H_0 Z_1, \quad P_{,3} = -\hat{P} z - \sigma^3 Q_0 Z_1 \quad \dots\dots\dots(18)$$

(18)式を $z = 1 \sim z$ で積分すると(19)式が得られる。

$$U = U_0 + \hat{U} \phi_2 + \sigma^3 H_0 Z_2, \quad P = H - \hat{P} \phi_2 - \sigma^3 Q_0 Z_2 \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 U_0 : 水面流速

$$Z_i = \int_1^z Z_{i-1} dz, \quad Z_1 = W_{3,1} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\phi_i = \int_1^z \phi_{i-1} dz, \quad \phi_1 = z \quad \dots\dots\dots(21)$$

である。

②においては $R_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i U_{i-j} U_j - U_0 U_i$ を導入すると記述が簡単になり、E は次の様に書ける。

$$E_i = U_0 U_i + P_i + R_i \quad \dots\dots\dots(22)$$

$i = 0 \sim 3$ に対する R_i は

$$R_0 = -U_0^2/2, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = U_1 U_1/2 = f^2/2, \quad R_3 = U_1 U_2 = f U_2 \quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。これらを用いると②式は

$$\begin{aligned} & \sigma^4 [U_0 U_i + P_i + R_i] \\ &= -\frac{1}{B} \int_{-\infty}^x [\sigma^2 H_0 V_2 U_{0,2} + \sigma^3 (e - H_0) V_2 U_{0,2}] dx - \sigma^3 H_0 \frac{(e_{,1}^2)_{,1}}{2} z^2 + \sigma^4 H_0 E_i \quad \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$\text{ここに} \quad E_{i(-\infty)} = \sigma^4 [U_0 U_i + P_i + R_i]_{x \rightarrow -\infty} \quad \dots\dots\dots(25)$$

①式においては、まず(4)式との関係より

$$\begin{aligned} -W_{i+1} &= \left[\sum H_{i-j} \left\{ \hat{U}_j \frac{z(z^2-1)}{6} + \sigma^3 H_0 [Z_3(z) + (z-1) Z_3(0)] \right\} \right]_1 \\ &+ \frac{z}{B} \int_1^0 H_{i-j} V_j dz - \frac{1}{B} \int_z^0 H_{i-j} V_j dz \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

流量は Q_i を $z = 0 \sim 1$ で積分して

$$\bar{Q}_i = \int_0^1 Q_i dz = \sum H_{i-j} \bar{U}_i = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(27)$$

\bar{U} の積分は(19)～(21)式より

$$\bar{U} = \int_0^1 U dz = U_s - \hat{U} \phi_3(0) - \sigma^3 H_0 Z_3(0) \quad \dots\dots\dots(28)$$

また(27), (28)式より(29)式が得られる。

$$\bar{Q}_i = U_0 H_i + H_0 \left[U_{s,i} - \frac{\hat{U}_i}{3} - \sigma^3 H_0 Z_3(0) \right] + \sum_{j=1}^{i-1} H_{i-j} \bar{U}_j \quad \dots\dots\dots(29)$$

以上①～④について得られた関係を i 次のオーダーについて整理すると (i 次の項は総て左辺におく) I ~ IV となる。

$$\text{④} \rightarrow \text{VI} : U_i - U_{s,i} = f_{1i} \quad , \quad f_{1i} = \hat{U}_i \phi_2 + \delta_{3i} H_0^2 Z_2$$

$$\text{③} \rightarrow \text{III} : P_i - H_i = f_{2i} \quad , \quad f_{2i} = -\hat{P}_i \phi_2 - \delta_{3i} Q_0 Z_2$$

$$\text{②} \rightarrow \text{II} : E_{i(-\infty)} - U_0 U_i - P_i = f_{3i} \quad ,$$

$$f_{3i} = R_i + \delta_{2i} \frac{1}{B} \int_{-\infty}^x V_2 U_{0,2} dx + \delta_{3i} \frac{1}{B} \int_{-\infty}^x \left(\frac{e}{H} - 1 \right) V_2 U_{0,2} dx + \frac{1}{2} \delta_{3i} H_0 e_{,i}^2 z^2$$

$$\text{①} \rightarrow \text{I} : H_i + U_0 U_{s,i} - \frac{\bar{Q}_i}{U_0} = f_{4i} \quad , \quad f_{4i} = U_0 \left[\frac{\hat{U}_i}{3} + \delta_{3i} H_0 Z_3(0) \right] - \frac{1}{U_0} \sum_{j=1}^{i-1} H_{i-j} \bar{U}_j$$

ここで、I ~ IV の線形和をとり

$$f_{4i} + f_{3i} + f_{2i} + U_0 f_{1i} = D_i \quad , \quad D_i = E_{i(-\infty)} - \frac{\bar{Q}_i}{U_0} \quad \dots\dots\dots(30)$$

とすると i 次の変数は取り除かれてしまい、 H_{i-1} に関する微分方程式が得られる。 H_i は z に依存しないから、 z を含む項のみからなる方程式(A)と z を含まない方程式(B)が得られる。

$$\text{(A)} \quad (U_0 \hat{U}_i - \hat{P}_i + \delta_{3i} H_0 e_{,i}^2) \frac{z^2}{2} + \tilde{R}_i = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$\text{(B)} \quad U_0 \left[\frac{\hat{U}_i}{3} + \delta_{3i} H_0 Z_3(0) \right] - \frac{1}{U_0} \sum_{j=1}^{i-1} H_{i-j} \bar{U}_j + \hat{R}_i - \frac{1}{2} (U_0 \hat{U}_i - \hat{P}_i) + \delta_{2i} \frac{1}{B} \int_{-\infty}^x V_2 U_{0,2} dx + \delta_{3i} \frac{1}{B} \int_{-\infty}^x \left(\frac{e}{H} - 1 \right) V_2 U_{0,2} dx = D_i \quad \dots\dots(32)$$

$$R_i = \hat{R}_i + \tilde{R}_i \quad , \quad Z_i = \hat{Z}_i + \tilde{Z}_i$$

であり z を含む項と含まない項に分けたものである。 H_i が z に依存しない条件が(A)から得られ、(B)が H_i に関する微分方程式となる。 D_i は次の様に与えられる。

$$D_i = [f_{4i} + f_{3i}]_{x=-\infty} = \left[R_i - \frac{1}{U_0} \sum_{j=1}^{i-1} H_{i-j} \bar{U}_j \right]_{|x| \rightarrow \infty} \quad \dots\dots\dots(33)$$

D_0 は(12)式, D_1 は(17)式であり、 D_2, D_3 は(33)式より

$$D_2 = \left[\frac{f^2}{2} - \frac{ef}{U_0} \right]_{x=-\infty} \quad , \quad D_3 = \left[f U_2 - \frac{H_2 f + e U_2}{U_0} \right]_{x=-\infty} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$i = 2, 3$ のとき(A)式は満たされている。

(B)式からは f, H_2 に関する微分方程式が得られる。

$i = 2$ のときは

$$\frac{U_0^5}{3} f_{,11} - \frac{3}{2} f^2 + \frac{Q_1}{U_0} f - \frac{KU_{0,2}}{B} (f - f_{-\infty}) = -D_2 \quad \dots\dots\dots(35)$$

となり、KdV方程式が得られる。

ここでVの流速を(36)式で与えた。これは、x方向に関するVの変化は跳水ピークより上流では水路中央に向かい、下流では外側に向い、 $f_{,1}$ に定性的に一致することと、この様にあたえたと解析解が求まるためである。

$$V_2 = K f_{,1} , \quad K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(36)$$

(35)式において $3f_{-\infty} - \frac{Q_1}{U_0^2} = l$ とおくと(35)式の解は(37)式である。

$$f = f_{-\infty} - \left(l - \frac{KU_{0,2}}{B} \right) \text{sech}^2 \sqrt{\frac{3}{4U_0^5} \left(l + \frac{KU_{0,2}}{B} \right)} x \quad \dots\dots\dots(37)$$

となる。

$i = 3$ からは H_2 に関する微分方程式が得られる。 $H_{2(-\infty)} = 0$, $U_{2(-\infty)} = 0$ を用いた。

$$\begin{aligned} & \frac{U_0^4 H_{2,11}}{3} + \left(\frac{Q_1}{U_0^3} - \frac{3}{U_0} f \right) H_2 \\ &= \frac{U_0^9 f_{,1111}}{45} + \left\{ (U_0^4 + U_0^2 - U_0) f + \left(U^2 - 1 + \frac{1}{U_0} \right) Q_1 \right\} \frac{f_{,11}}{3} + \frac{1}{6} U_0^4 f_{,1}^2 \\ & - \frac{2}{U_0} f + \left(\frac{3Q_1}{U_0^3} - \frac{J}{2} \right) f - \left\{ \frac{2\bar{Q}_2}{U_0^2} + \frac{Q_1^2}{U_0^5} + \left(\frac{Q_1}{U_0^3} - 1 \right) J \right\} f + \frac{\bar{Q}_2 Q_1}{U_0^4} \\ & + \left\{ \frac{f_{-\infty}^2 J}{2} + \left(\frac{Q_1}{U_0^3} - 1 \right) J f_{-\infty} \right\} + D_3 \quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

が得られる。ここに $J = \frac{KU_{0,2}}{B}$

(38)式の左辺=0には $H_2 = A f_{,1}$, $A = \text{constant}$ の解がある。特解に次式を仮定する。

$$H_2 = \alpha f^2 + \beta f + \gamma \quad \dots\dots\dots(39)$$

これを(38)式の左辺に代入して右辺とのfのべき毎に係数を合わせると(40)式がえられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3a_1}{4U_0^3} , \quad \beta = - \left(\frac{5a_1}{6U_0^5} + \frac{a_2}{U_0^3} + \frac{2}{3U_0^2} \right) Q_1 + \left(\frac{4a_1}{3U_0^3} - \frac{4}{3} + \frac{U_0}{3} \right) J \\ \gamma &= \left(\frac{14}{15} - \frac{7a_1}{6U_0} \right) D_2 + \frac{4}{15U_0^4} Q_1^2 + \frac{2\bar{Q}_2}{3U_0} + \left(\frac{4a_1}{9U_0} - \frac{23}{45} + \frac{U_0}{9} \right) J^2 \\ & - \frac{U_0}{3} J + \left(\frac{11}{15} - \frac{7a_1}{6U_0^3} \right) f_{-\infty} J - \left(\frac{5a_1}{18U_0^5} + \frac{2a_2}{3U_0^3} - \frac{11}{45U_0^2} \right) Q_1 J + D_3 \quad \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

ここに $a_1 = U_0^4 + U_0^2 - 1$, $a_2 = U_0^2 - 1 + \frac{1}{U_0}$ (41)

4. 実測値との比較と考察

1. に述べた実験に合わせるとパラメーターは H_0 、1つになる。図-1に H_0 と $\sigma H_1(x=0)$, $\sigma^2 H_2(x=0)$ の変化を示した。 H_0 , $\sigma H_1(x=0)$, $\sigma^2 H_2(x=0)$ がほぼ1となる範囲は $H_0 = 1.0 \sim 2.0$ である。この範囲では、図-2の理論値と実測値の比較からわかる様に $H_0 = 1.6$ が実測値に近い。以下の図は $H_0 = 1.6$ に関するものである。図-3は1次と2次の波の比較である。2次は、1次に比べて波形は突り、波高は小さくなっている。図-4は、横流入が入るときとないときの比較である。これより、横流入によって波高はわずかではあるが高くなることがわかった。

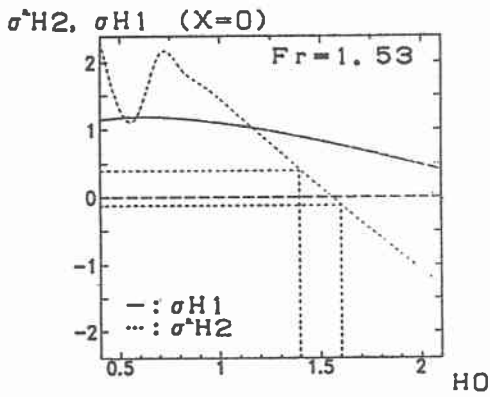


図-1

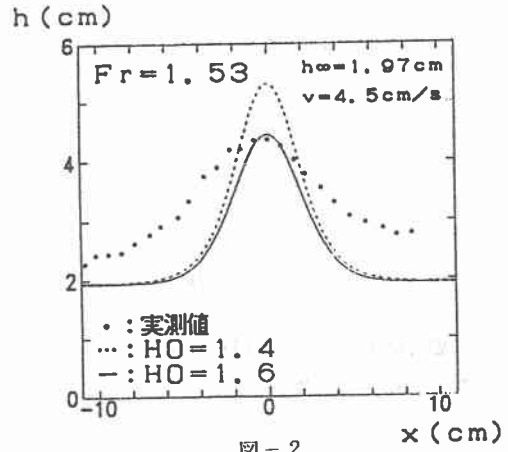


図-2

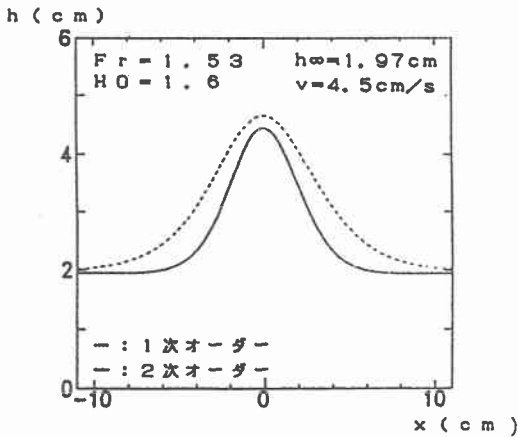


図-3

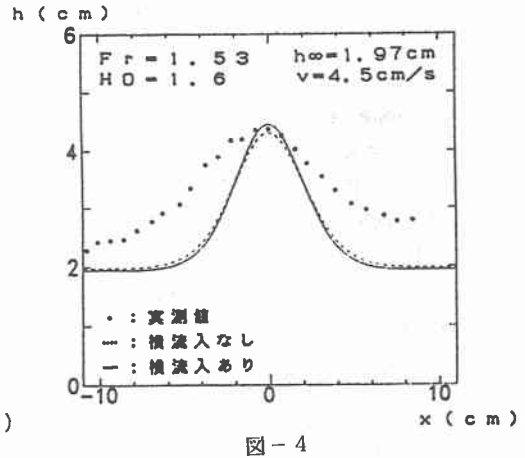


図-4

参考文献

- 1) E. V. Laiton: The second approximation to cnoidal and solitary waves, *J. Fluid Mech.* vol. 9, 1961
- 2) 森 明巨・板倉忠興・森平宏治・高田修二: 跳水と境界層の相互干渉 - 三次元波状跳水, *水工学論文集* 第36巻, 1992. 2
- 3) 森 明巨・板倉忠興・平井 誠: 波状低面上の有限振幅波に関する理論的研究, *土木学会北海道支部論文報告集*, 第51号, II-57
- 4) 横道英雄: *工学系のためのテンソル解析*, 技報堂出版, 1983