

II-54

円柱上を過ぎる波の水理特性について

北見工業大学工学部 正員 佐藤 幸雄
 北見工業大学工学部 学生員 林 誉命

I. まえがき

水中に円形あるいは楕円形の構造物が没水状態で設置されていて、その上の水面を波が通過するとき、一般に、その構造物の影響により反射波および散乱波が発生すること、また、構造物を通過した後の透過波も変化することが考えられる。Dean¹⁾は微小振幅深水波の場合に限って水中の円柱上を通過する波に関して構造物からの反射波および散乱波は全く発生しないことを流れ関数を用いて解析的に求めている。この様子は水深に比して円柱の直径が小さい場合にほとんど反射波が発生しないことが実験によっても見られる。

しかし、水深が浅い浅水波の場合あるいは円柱の直径が水深に比して大きい場合、また楕円形の場合には上述の反射波が発生し、したがって透過波の変化が起こることが予想される。

本研究は昨年度の支部論文報告集掲載のものと同様、速度ポテンシャルにLaurent展開を用いた解析的手法により再度反射率および透過率を算定するための数値計算を試みたものであるが、この場合の解析過程において、Laurent展開の級数の各項の係数が小さい値から大きな値まで変化することから、境界上の選点を種々試行的に行う必要があることが分かった。今回の報告では種々の選点による計算結果の中より妥当と考えられる2, 3の計算結果と共に、円柱および楕円柱を用いた若干の実験結果との比較検討を行った結果を述べた。以下にその詳細を示すこととする。

II. 基本方程式

昨年同様の解析方法であるが、その概略を示すと次のようである。2次元的に考えて、図-1に従って、" ' " を付した各次元変量を、入射波の角周波数 ω' と重力の加速度 g' を使用して無次元化すると、無次元化された各変量は式(1)で定められる。

$$\left. \begin{aligned} (x, y, v) &= (x', y', v') \omega'^2 / g' \\ (x_0, y_0) &= (x'_0, y'_0) \omega'^2 / g' \\ (\eta, h) &= (\eta', h') \omega'^2 / g', \quad t = \omega' t \\ (u, v) &= (u', v') \omega' / g' \\ \text{波数; } k &= k' g' / \omega'^2, \quad r = r' \omega'^2 / g' \\ \text{円柱半径; } R_0 &= R'_0 \omega'^2 / g' \\ \text{スカラーポテンシャル; } \phi &= \phi' \omega'^3 / g'^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

無次元化された波動場内の速度ポテンシャル Φ を
 $\Phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i t} \quad (2)$

とおく。式(2)の ϕ に対して r 方向にLaurent展開し、また θ 方向にFourier展開した次式の形を適用すると、式(3)はLaplaceの方程式を満たす。

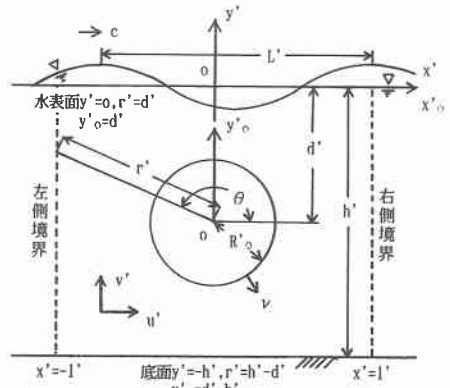


図-1 座標系の定義

$$\phi = \sum_{n=-N}^N f_n r^n e^{i n \theta} \quad (3)$$

式(3)を使用すると流速成分 u, v はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \\ v &= \sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{i((n-1)\theta + \pi/2)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

入射波領域および透過波領域における波動のポテンシャルはそれぞれつぎのようである。

入射波領域に関しては

$$\left. \begin{aligned} \text{入射波;} & \phi_i = 1 \cdot e^{ik(x_0+1)} A_0(y_0) \\ \text{反射波;} & \phi_r = a_0 e^{-ik(x_0+1)} A_0(y_0) \\ \text{散乱波;} & \phi_d = \sum_{n=1}^M a_n e^{kn(x_0+1)} A_n(y_0) \end{aligned} \right\} (5)$$

として、入射波領域のポテンシャル ϕ_R は

$$\begin{aligned} \phi_R &= \phi_i + \phi_r + \phi_d \\ &= e^{ik(x_0+1)} A_0(y_0) + a_0 e^{-ik(x_0+1)} A_0(y_0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^M a_n e^{kn(x_0+1)} A_n(y_0) \end{aligned} (6)$$

同様に透過波領域に関しては

$$\left. \begin{aligned} \text{透過波;} & \phi_t = b_0 e^{ik(x_0-1)} A_0(y_0) \\ \text{減衰定在波;} & \phi_s = \sum_{n=1}^M b_n e^{-kn(x_0-1)} A_n(y_0) \end{aligned} \right\} (7)$$

として、ポテンシャル ϕ_T は

$$\begin{aligned} \phi_T &= \phi_t + \phi_s \\ &= b_0 e^{ik(x_0-1)} A_0(y_0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^M b_n e^{-kn(x_0-1)} A_n(y_0) \end{aligned} (8)$$

ここで、 $A_0(y_0)$ 、 $A_n(y_0)$ は図-1に従うと、

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0, y = y_0 - d \text{ であり、} \\ A_0(y_0) &= \frac{\cosh k(y_0 - d + h)}{\cosh kh} \\ A_n(y_0) &= \frac{\cos k_n(y_0 - d + h)}{\cos k_n h} \end{aligned} \right\} (9)$$

とする。また、無次元化された分散関係式は

$$k \tanh kh = 1, k_n \tan k_n h = -1$$

である。

つぎに、式(6)、(8)より水平方向流速成分 u_R, u_T はそれぞれ、

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{\partial \phi_R}{\partial x_0} = i k e^{ik(x_0+1)} A_0(y_0) \\ &\quad - i k a_0 e^{-ik(x_0+1)} A_0(y_0) + \sum_{n=1}^M k_n a_n e^{kn(x_0+1)} A_n(y_0) \end{aligned} (10)$$

$$\begin{aligned} u_T &= \frac{\partial \phi_T}{\partial x_0} = i k b_0 e^{ik(x_0-1)} A_0(y_0) \\ &\quad - \sum_{n=1}^M k_n b_n e^{-kn(x_0-1)} A_n(y_0) \end{aligned} (11)$$

となる。

III. 境界条件

1) 底面 ($y=-h$ または $y_0=d-h$) において

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{i((n-1)\theta + \pi/2)} = 0 (12)$$

2) 円柱の表面 ($r=R_0$) において

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{in\theta} = 0 (13)$$

3) 自由表面 ($y=0$ または $y_0=d$) において

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \phi \text{ より} \\ \sum_{n=-N}^N [f_n r^n e^{in\theta} \\ &\quad - n f_n r^{n-1} e^{i((n-1)\theta + \pi/2)}] = 0 \end{aligned} (14)$$

4) 図-1の左側境界($x=-1$)および右側境界($x=1$)上でそれぞれポテンシャル接続を行うと、まず左側境界上については、式(3)と式(6)、式(4)の第1式と式(10)より

$$\begin{aligned} [\phi]_{x=-1} &= [\phi_R]_{x=-1}, [u]_{x=-1} = [u_R]_{x=-1} \\ \text{となり、これより} \\ \left[\sum_{n=-N}^N f_n r^n e^{in\theta} \right]_{x=-1} - A_0(y_0) a_0 \\ &\quad - \sum_{n=1}^M A_n(y_0) a_n = A_0(y_0) \end{aligned} (15)$$

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{i((n-1)\theta)} \right]_{x=-1} - k_0 A_0(y_0) a_0 \\ - \sum_{n=1}^M k_n A_n(y_0) a_n = -k_0 A_0(y_0) \end{aligned} (16)$$

同様に右側境界上では

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=-N}^N f_n r^n e^{in\theta} \right]_{x=1} - A_0(y_0) b_0 \\ - \sum_{n=1}^M A_n(y_0) b_n = 0 \end{aligned} (17)$$

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=-N}^N n f_n r^{n-1} e^{i((n-1)\theta)} \right]_{x=1} - k_0 A_0(y_0) b_0 \\ - \sum_{n=1}^M k_n A_n(y_0) b_n = 0 \end{aligned} (18)$$

となる。

IV. 数値計算と計算結果

境界条件の各式の中で未知数の数は式(12)、(15)および(17)の中でそれぞれ $(2N+1)$ 、 $(M+1)$ および $(M'+1)$ ケの合計 $MN=(2N+M+M'+3)$ ケであり、したがって、

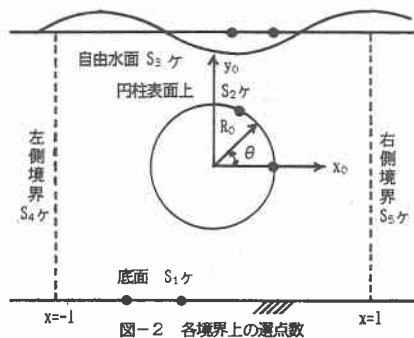


図-2 各境界上の選点数

MNヶと同数の条件式が必要である。また、条件式を作るために各境界上の点の数を図-2に示すように決めると、条件式の数はそれぞれ底面上 S_1 、円柱表面上 S_2 、自由水面上 S_3 、左側境界上 $2S_4$ 、および右側境界上 $2S_5$ 、合計 $SS=\{S_1+S_2+S_3+2(S_4+S_5)\}$ 本となる。すなわち、 $MN=SS$ が成り立つように N, M, M' および選点数を決定する必要がある。

このとき各未知数はそれぞれの条件式を用いて作られた連立方程式を解くことにより求めることが出来る。

つぎに本報告における計算条件を図-3に示す。計算条件を式(1)の関係を使用して有次元量に換算すると、水深 $h'=30\text{cm}$ 、没水深 $d'=15\text{cm}$ 、周期 $T'=0.8\text{sec}$ でそれぞれ一定の場合について、円柱の半径がそれぞれ $R_0'=5.7\text{cm}$ (CASE-1)、 $R_0'=3.0\text{cm}$ (CASE-2)の場合に相当する。

以上の条件について境界上の選点座標を種々変えて計算を行い、反射率 $K_R=|a_0|$ および透過率 $K_T=|b_0|$ の値を算出した。そして、エネルギーの関係から $(K_R^2+K_T^2)$ の値が1に最も近くなる場合が K_R, K_T の妥当な値として採用した。

計算結果を示すと次のようである。

$$MN=(2 \times 5 + 2 + 2 + 3) = 17 \text{ヶ}$$

選点の数は図-3に示すように、円柱表面上 $S_2=5$ 、その他の境界上でそれぞれ、 $S_1=S_3=S_4=S_5=2$ ずつ計13点を取り、条件式は $SS=17$ 本である。また、CASE-1とCASE-2では選点座標が若干異なっている。

CASE-1およびCASE-2の場合の K_R, K_T の値はそれぞれ、

$$\text{CASE-1; } K_R=0.431, K_T=0.970$$

$$\text{CASE-2; } K_R=0.199, K_T=0.995$$

を得た。

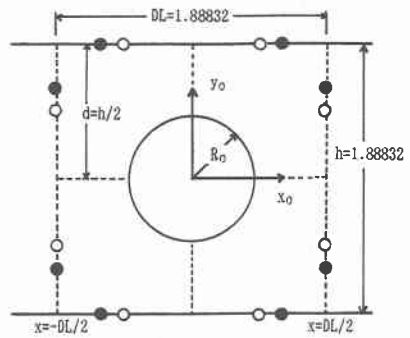


図-3 計算条件(無次元数)

CASE-1 ○印 $R_0=0.35878$

CASE-2 ●印 $R_0=0.18883$

V. 実験方法および実験結果

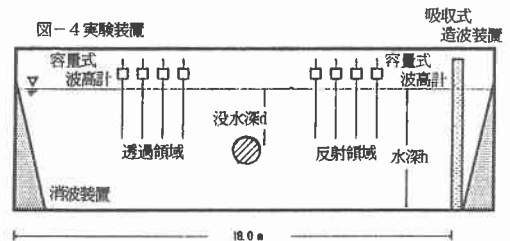


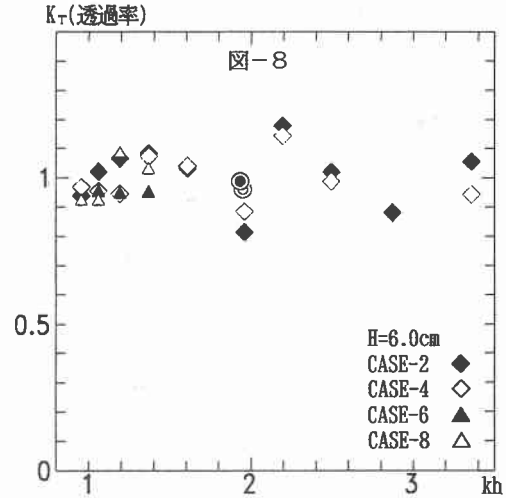
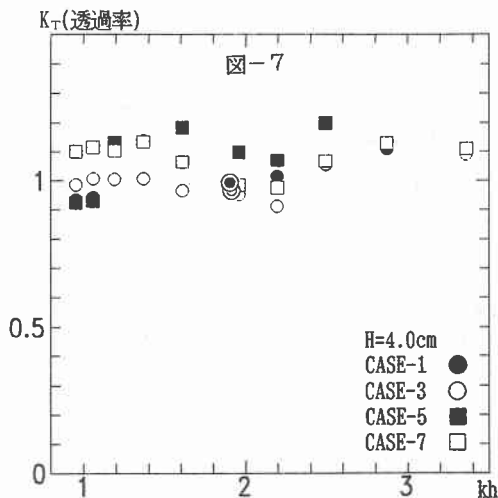
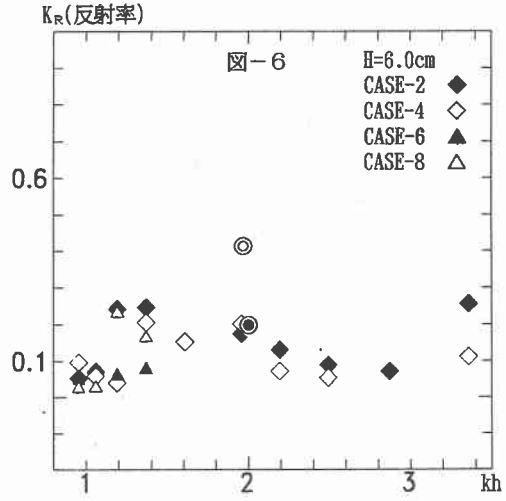
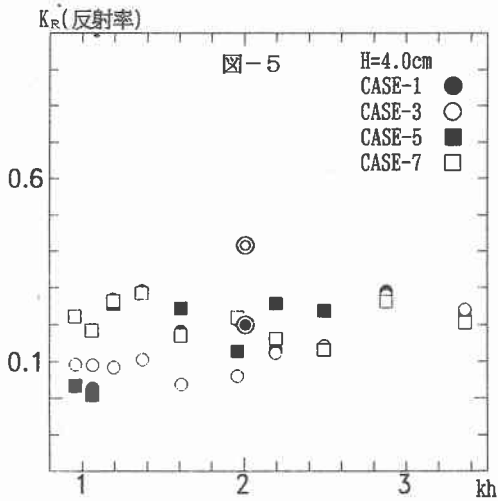
表-1 静水深 $h=30.0\text{cm}$ 、没水深 $d=15\text{cm}$

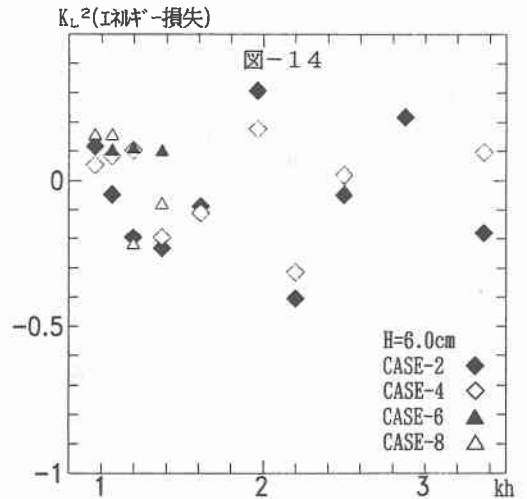
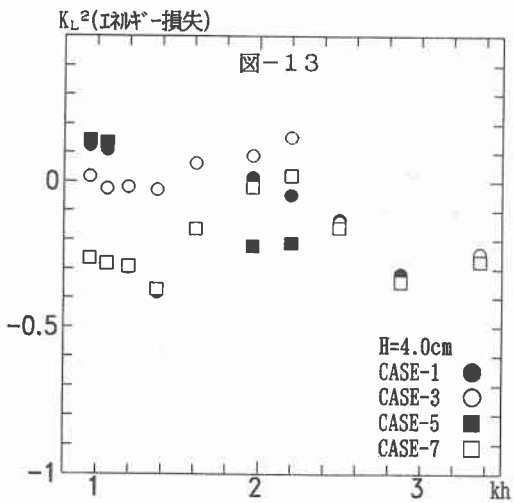
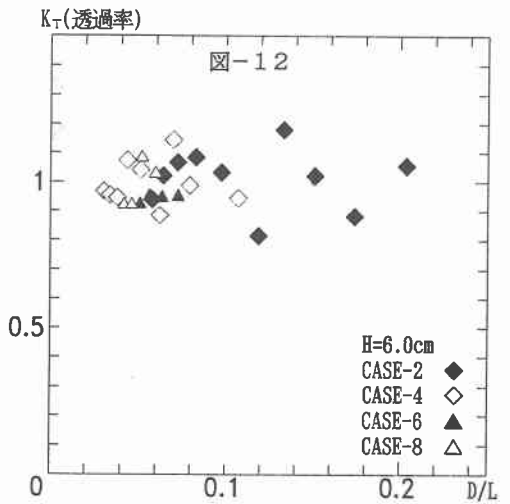
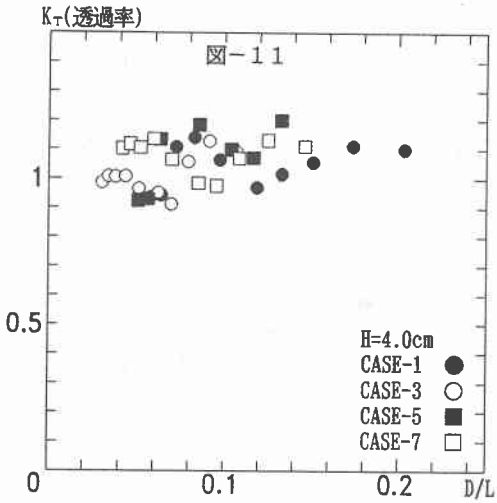
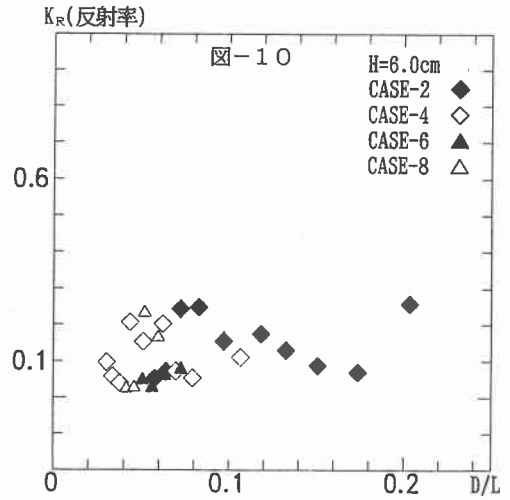
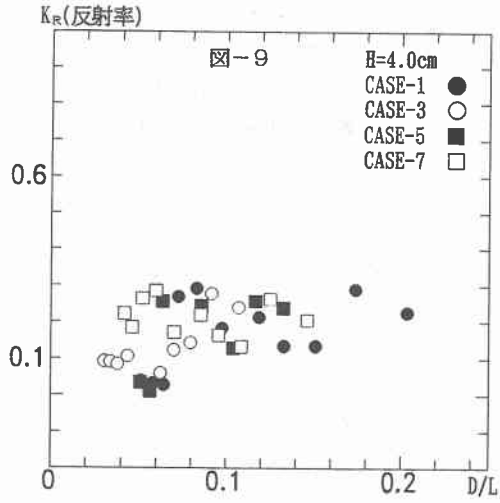
構造物形式	入射波高 H(cm)	周期 T(sec)	CASE
円柱 (直径 $D=11.4\text{cm}$)	4	1.3	1
	6		2
円柱 (直径 $D=6.0\text{cm}$)	4	0.6	3
	6		4
楕円柱 (横置き) $a=10.0\text{cm}, b=8.3\text{cm}$	4	10通り	5
	6		6
楕円柱 (縦置き) $a=8.3\text{cm}, b=10.0\text{cm}$	4	10通り	7
	6		8

実験には図-4に示すような幅0.25m、深さ0.5m長さ22mの片面ガラス張りの2次元造波水槽を使用

し、造波装置は吸収式造波装置である。静水深は $h=30.0\text{cm}$ で一定とした。使用した物体の種類は表-1に示すように、直径が $D=11.4\text{cm}$ と $D=6.0\text{cm}$ の2種類の円柱と楕円柱を横置きにした場合と縦置きの場合の計4種類である。没水深 d は物体の中心の水面からの深さで、 $d=15\text{cm}(=h/2)$ の1通りとした。また実験波の種類は表-1に示すように、波高が $H=4.0\text{cm}$ と 6.0cm の2通りであり、周期は $T=1.3\text{sec}\sim 0.60\text{sec}$ までの間で10種類とした。波高の測定は図-4に示すように物体の設置箇所の沖側(反射領域)と岸側(透過領域)にそれぞれ4本ずつの容量式波高計を設置し、波高の記録を行った。そして測定値を入射分離法により、反射率 K_R および透過率 K_T の値を求めた。

つぎに、実験結果を述べると、入射波波高が $H=4.0\text{cm}$ の場合の反射率 K_R についてCASE-1,3,5,7の各CASEを比較してみると図-5のようである。図-5より、 kh の値が小さいところ、すなわち周期の長いところで、円柱の直径($D=11.4\text{cm}$)が大きいCASE-1(●印)の方が直径($D=6.0\text{cm}$)の小さいCASE-3(○印)よりやや K_R の値は大きくなっているが、周期が短く、すなわち kh が大きくなると K_R は同様の値となっている。また楕円柱の場合のCASE-5,7を見ると、周期が長いとき、すなわち kh が小さいとき、楕円柱縦置きのCASE-7(□印)の方が K_R は大きくなり、 kh が大きくなると、すなわち周期が短くなると、CASE-5(■印)の方が反対に K_R の値は大きくなっている。





このことは、周期が長い波は水粒子軌道の水平方向軌道長（長軸）が長く、したがって、楕円柱縦置きの場合はこの水平方向流速成分を阻止するように作用し、また反対に周期が短い場合は楕円柱横置きの場合に鉛直方向の流速成分を阻止するようになるため、反射率 K_R の値が大きくなることと思われるが、この原因についてはさらに十分な実験による検討が必要と考えられる。

また、 $H=6.0\text{cm}$ の場合については反射率 K_R の値を図-6に示した。図を見ると、 $H=6.0\text{cm}$ の場合も $H=4.0\text{cm}$ の場合と大差はなく、同様の反射率 K_R の値を示していると云える。図-5および図-6から反射率 K_R の値は小さい方で $K_R=0.1$ 前後から大きい値で $K_R=0.2\sim 0.3$ 程度の値を示している。

いずれにしても、浅水波の実験においては、深水波におけるDeanの理論のように反射率は零とはならず反射波の発生が見られた。

つぎに、透過率 K_T の値については、 $H=4.0\text{cm}$ の場合は図-7に、 $H=6.0\text{cm}$ の場合は図-8に示した。図-7を見ると、 $H=4.0\text{cm}$ の場合の透過率 K_T の値は $K_T=0.9\sim 1.0$ あるいは本来の $K_T < 1.0$ に反して 1.0 以上の値も多くみられ、また、 $H=6.0\text{cm}$ の図-8においても同様である。このことは、本実験の場合は反射率が小さいこと、すなわち反射率の発生が少ないこと、またエネルギー損失量も小さいことが考えられ、したがって透過率は $K_T=1.0$ に近い値を示すと云えるが、しかし造波水槽末端からの僅かな反射波の影響および測定誤差により容易に $K_T > 1.0$ となることが考えられる。それ故、さらに精度の良い測定が必要と考えられる。このことは図-13, 14のエネルギー損失量 K_L^2 の値についても見られ、 $K_L^2 (=1-K_R^2-K_T^2) < 0$ となっている場合が多く見られる。

図-9～図-12は反射率 K_R が大きく現れるとき、あるいは K_T が小さくなるときの円柱の直径および楕円中の横軸の長さ D と波長 L の関係を横軸に D/L の値を取って描いた図であり、図-9, 11 ($H=4.0\text{cm}$)および図-10, 12 ($H=6.0\text{cm}$)の場合共に測定値にばらつきが多く明確な D/L の関係は見い出されないが、強いて云うと、 $H=4.0\text{cm}$, 6.0cm の場合共に、 $D/L=0.08$ 程度で K_R の値が大きく現れるようである。

つぎに、IVの数値解析により得られた2つのCASEの場合の計算結果を図中に示すと、CASE-1（円柱半径 $RH=0.57$, 周期 0.8sec の場合）◎印、CASE-2（円柱半径 $RH=0.3$, 周期 0.8sec の場合）●印であり、CASE-1の場合の計算値は $K_R=0.43$, $K_T=0.97$ で K_T は測定値に近い値を示しているが、 K_R はやや大きい値となっている。またCASE-2の円柱半径が小さい場合が測定値に近い値を示すと云える。

VI. まとめ

深水波の場合のDeanの理論と若干様相が異なり、浅水波の場合は $K_R=0.1\sim 0.2$ 程度の反射波の発生が見られる。しかし、水深の $1/3$ 程度の大きな円柱が存在している場合でも反射波の発生は大きくないことが分かった。楕円柱の場合は円柱の場合と大差はないが長軸の向きが水平あるいは鉛直方向により若干異なった反射率を示すこと、また全体的には円柱の場合により若干大きい K_R の値を示すことなどが分かった。

Laurent展開をポテンシャルに用いた数値解析では計算条件が同一であっても選点の数および座標の取り方により計算結果も種々な値が算出される。これはLaurent展開による級数が円柱のまわりの円環状の領域内の値に対して収束性が良い事を考えると、特に境界上の選点の数、座標の取り方が重要なことと考えられる。

<参考文献>

- 1) W.R. Dean; On the reflexion of surface waves by a submerged circular cylinder, Proc. of Cambridge philosophical Society vol. 44, 1948
- 2) 佐藤・浜中・南雲; 水中構造物を過ぎる波—円筒座標系を用いた解法—, 土木学会北海道支部論文報告集 第50号