

II-53

波動場中の円柱に働く流体力について

北見工業大学工学部 正員 佐藤 幸雄  
 北海道東海大学工学部 正員 浜中 建一郎  
 北見工業大学工学部 学生員 奥村 慎也

I. まえがき

粘性の影響により円柱表面上に剥離が発生する場合の円柱に加わる流体力については、以前に、円柱より遠く離れた境界層外縁にポテンシャル流の水平振動流を与えた場合について、渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式を使用して数値解析を行いストローハル数が次第に大きくなると剥離を伴う場合が、剥離を伴わないポテンシャル流の場合より円柱に加わる流体力（圧力+せん断力）は最大値に関して大きくなることを示した。<sup>1)</sup>しかし実際の海洋を対象に考えると、水平振動流を用いた場合は特に周期が長い波に限られるため、やはり、水平、鉛直方向の流速成分を有する波動場の場合を考える必要がある。

本研究においては円柱表面より遠く離れた境界層外縁の境界条件にポテンシャル流である微小振幅浅水波の水平、鉛直方向の流速成分を与え波動場に対する円柱のまわりの流れの場の状況を上記と同様の渦度方程式および流れ関数に対するポアソン方程式を用いて数値解析を行った。その結果、水平振動流の場合とは様相が異なった渦度、流れ関数および圧力場の値が求められた。さらに、円柱に加わる流体力のうち水平方向成分の時間変化を求めた。そして、剥離を伴わないポテンシャル流の微小振幅波の場合との比較検討を行い、また水平振動流の場合との相違点などについて調べた。以下にその詳細について述べることにする。

II. 基本方程式

円柱のまわりの2次元流を考えて、流れに垂直方向にy軸、平行方向にx軸を取る。またすべての変量について、' ' を付した有次元量を円柱の半径  $R_0'$  と波動場の振動数  $\sigma'$  を使用して無次元化すると、x, y座標、時間、水平、鉛直方向流速成分の振幅、流速成分、流れ関数、渦度および動粘性係数に関してそれぞれ

$$\begin{aligned} x &= R_0' x', \quad y = R_0' y', \quad \sigma t' = t, \quad A = R_0' A \\ u' &= \sigma' R_0' u, \quad v' = \sigma' R_0' v \\ \psi' &= \sigma' R_0'^2 \psi, \quad \omega' = \sigma' \omega, \quad v' = \sigma' R_0'^2 v \end{aligned} \quad \dots\dots (1)$$

である。

さらに、式(2)を用いた等角座標として図-1に示すような新しい座標系を導入すると、無次元化された渦度方程式およびポアソン方程式はそれぞれ式(3)、(4)となる。

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad R = e^r \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \left\{ -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad \dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -J \omega \quad \dots\dots (4)$$

ここで、Jは式(2)のヤコビアンで、

$$J = e^{2r} \quad \dots\dots (5)$$

である。式(3)および(4)に対する境界条件として円柱の表面上  $r = 0$  では

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \psi = 0 \quad \dots\dots (6)$$

またもう一つ境界条件として、円柱表面上における渦度  $\omega$  の値を得るために、Thom's 条件による次式を使用した。

Fluid force acting on circular cylinder in water waves;  
 by Yukio SATO, Ken-ichiro HAMANAKA and Shinya OKUMURA

$$\omega = -J^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi(\Delta \zeta)}{(\Delta \zeta^2)} \right\} \quad \dots\dots (6')$$

さらに円柱近傍の座標を細かく設定するため、新しく変数  $\zeta$  を導入して、 $r$  の値を式 (7) により与える。式中の  $b$  は、座標の歪みを表す。

$$r = r_T \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad \dots\dots (7)$$

$r_T$  は、円柱より遠く離れた点 ( $\zeta = 1$ ) の  $r$  の値である。座標系を図-1 に示した。

また、円柱から遠く離れたところの  $r = r_T$  でポテンシャル流である微小振幅浅水波を適用することとして、境界条件 ( $\partial \psi / \partial r$ )  $r=r_T$  には次式の関係を使用する。

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = -v \cdot e^r \cos \theta + u \cdot e^r \sin \theta$$

ここで、無次元化した微小振幅波の流速成分は

$$\left. \begin{aligned} u &= A \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx-t) \\ v &= -A \frac{\sinh k(y+h)}{\sin kh} \cos(kx-t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

$A = H/2$ 、 $k = 2\pi/L$   $L$  ; 表面波の無次元波長  $L = L'/R_0$ 、 $y = y_0 - d = R \sin \theta - d$   
 $x = x_0 = R \cos \theta$ 、 $R = e^r$   
とする。すなわち、

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=r_T} = A \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} \{h - (d - R \sin \theta)\}}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \sin \left( \frac{2\pi}{L} R \cos \theta - t \right) \cdot R \sin \theta \\ + A \frac{\sinh \frac{2\pi}{L} \{h - (d - R \sin \theta)\}}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \cos \left( \frac{2\pi}{L} R \cos \theta - t \right) \cdot R \cos \theta$$

また、 $r = r_T$  で  $\omega = 0$   $\dots\dots (9)$

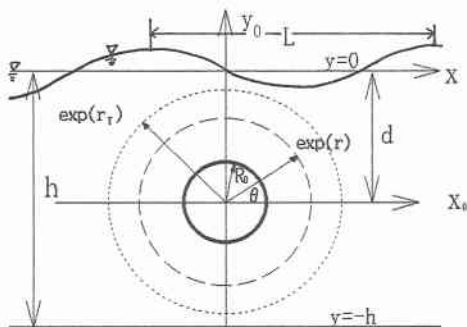


図-1 座標系の定義

### III. 数値解析方法

式 (3)、(4) を数値解析により解くために、簡単な有限差分法を使用し、時間微分は前進スキームを用い、また空間差分には中央差分スキームを使用した。この場合、新しい時間ステップにおける渦度  $\omega$  の値は式 (3) より求められ、また、同じ時間ステップにおける流れ関数  $\psi$  の値は式 (4) より得られる。そして、このような計算を行うために、渦度  $\omega$  および流れ関数  $\psi$  を  $\theta$  一方向にフーリエ級数に展開した式 (10)、(11) および (12) を使用した。

$$\omega = \sum_{m=1}^M g_m e^{im\theta} \quad \dots\dots (10)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^M f_m e^{im\theta} \quad \dots\dots (11)$$

このとき式 (3)、(4) の  $\omega$ 、 $\psi$  の  $\theta$  あるいは  $r$  に関する微分は式 (12) のように表される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \sum_{m=1}^M i m g_m e^{im\theta}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \sum_{m=1}^M -m^2 g_m e^{im\theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial f_m}{\partial r} e^{im\theta} \quad \dots\dots \text{etc.} (12)$$

ここで、 $M$  は  $\theta$  軸上の格子点の数である。この方法を使用すると 2次元ポアソン方程式の式 (4) は 1次元の方程式に帰着される。したがって、式 (4) を数値的に解くことは、各々の形態についての一組の線形方程式を解く結果となる。

式 (4) を使用して各メッシュ上の流れ関数  $\psi$  の値を求めるとき、 $r = r_T$  の境界層外縁における  $\partial f_m / \partial r$  の値は各  $\Delta t$  の時間ステップにおける  $\theta$  方向の  $\partial \psi / \partial r$  の値を式 (9) を用いて計算し、その値をフーリエ変換し、すなわち式 (12) より  $\partial f_m / \partial r$  を求めて使用した。

### IV. 圧力場

Navier-Stokesの方程式を使用して II. と同様の無次元化を行うことにより圧力場を与える式は、次のように表される。

$$\Delta p = 2 \cdot \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots (13)$$

ここで、 $\Delta = \nabla^2$ 、

$$p = \frac{p'}{\rho'(\sigma'R_0')^2} \quad \rho' ; \text{流体の密度}$$

式(13)の境界条件は、 $r - \theta$  軸に関して、円柱表面において、 $r = 0$  あるいは  $e^{\prime} = 1$  上で、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -v \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad \dots\dots (14)$$

また、円柱より充分遠い箇所の圧力には微小振幅波の圧力を適用する。 $\rho'$ 、 $R_0'$ 、 $\sigma'$  で無次元化した圧力の式は、

$$p_0 = \frac{L}{2\pi} A \frac{\cosh k(R \sin \theta - h - d)}{\sinh kh} \sin(k \cdot R \cos \theta - t) \quad \dots\dots (15)$$

である。また  $p_0$  をフーリエ級数展開して、

$$p_0 = \sum_{m=1}^M p_{0m} e^{im\theta}$$

とし、 $r = r_\tau$  のところの境界条件には  $p_0$  をフーリエ変換した  $p_{0m}$  の値を使用する。式(13)により圧力場  $p$  の値を求めるときは、まずⅢ.において、渦度  $\omega$  および流れ関数  $\psi$  の値が求められると、この流れ関数  $\psi$  の値を使用して、Ⅲ. で  $\psi$  を求めたときと同様の方法で求めることができる。

### V. 計算条件

無次元化された微小振幅波の流速成分の振幅  $A$  と動粘性係数  $\nu$  を使用すると、レイノルズ数  $Re$  とストローハル数  $S$  は式(16)によって表される。

$$Re = \frac{U'D'}{\nu} = 2\pi \frac{A}{\nu}, \quad S = \frac{UT'}{D} = \pi A \quad \dots (16)$$

ここで、 $U'$  ; 水平方向流速成分の最大流速、  
 $D'$  ; 円柱の直径 ( $D' = 2R'$ )、 $T'$  ; 表面波の周期である。計算条件を表-1に示した。

表-1において、円柱の半径  $R'_0$  で無次元化した無次元波長  $L$ 、水深  $h$ 、没水深  $d$  の条件はそれぞれ  $L=130$ 、 $h=40$ 、 $d=20$  の1種類のみであり、また、これらの値を有次元量に換算すると、たとえば、半径  $R'_0 = 1 \text{ cm}$  の円柱に対して、それぞれ  $L' = 130 \text{ cm}$ 、 $h' = 40 \text{ cm}$ 、 $d = 20 \text{ cm}$  に相当する。

表-1 計算条件  $L=130, h=40, d=20$   
 $Re=150, r_\tau=2.7, b=2$

CASE	MM	NN	NT	A	S	cycles
4-2	64	64	16000	2.603	4.0	6
4-4	64	64	16000	4.869	7.5	6
4-5	64	64	16000	6.503	10.0	4

### VI. 計算結果と考察

円柱のまわりの流れ場の渦度、流れ関数および圧力場の Contour 図を示すと、CASE 4-2 の場合それぞれ、図-3 (渦度  $\omega$ )、図-4 (流れ関数  $\psi$ ) および図-5 (圧力場  $p$ ) である。また、図-2は境界層外縁に  $A=2.385$  の水平振動流を与えた場合の流れ関数の Contour 図を参考までに掲載したものである。図-2と図-4を比較すると  $A$  と  $\nu$  の値は必ずしも同一ではないが、流れの状態は、水平振動流の図-2については (a) ~ (d) と (e) ~ (h) は、大略対称的になっているのに対し、波動場の場合の図-4では (a) ~ (h) の各々の図において上、下、左、右は変化しているのが分かる。これは、境界層外縁に与える流速成分の値が、時間  $t=0$  から計算を始めるとして、 $t=0$  で水平方向流速成分は  $u=0$  としているが波動場では  $v = -v_{\max}$  の値となっているため、各図において左、右は対称とならないこと、また円柱の上方と下方の境界上の流速が上方で速く、下方で遅いことから上・下側においても対称にならないことなどが考えられる。

図-4の (b) ( $t = \pi/2$ ) の位相においては鉛直方向成分が零で水平方向流速成分が最大の時であり、図-2 (b) に対応した場合である。

図-3、5の渦度、圧力の Contours についても、図-4の流れ関数に対応した状況が良く現れているといえる。

つぎに、レイノルズ数  $Re=150$  で同じ場合、ストローハル数が大きい  $S=10.0$  ( $A=3.185$ ) の場合の渦度、流れ関数および圧力場について同様の

Contour 図を示すと、図-6、図-7 および図-8 である。

図-7を見ると、円柱のまわりの流れの場は流速が一層速くなっている。それに対応して図-6、8では渦度の値も大きく、また円柱に働く圧力も大きく現れているのが分かる。

圧力の Contours を示す図-8を見て分かることは、水平振動流の場合、円柱に加わる圧力は水平方向の成分が主として強く現れるのが普通であるのに対して波動場の場合は鉛直方向の流速成分によって円柱の上側あるいは下側からも強い圧力が作用しているのが分かる。

つぎに、表-1の計算条件に示すよう、CASE 4-2、および CASE4-4 は6周期目、CASE4-5 は4周期目まで計算を進めた段階において、円柱に加わる流体力の水平方向成分のみを取り出し、その  $t = 0 \sim 2\pi$  のあいだの時間変化を求めてみると、図-9、図-10および図-11のようである。

この場合、剥離を伴う数値計算による値は各メッシュ上の値のうち円柱表面上 ( $r = 0$ ) の圧力  $p$  の

図-2 流れ関数の Contours  
水平振動流の場合  $A=2.385, \nu=0.0318$

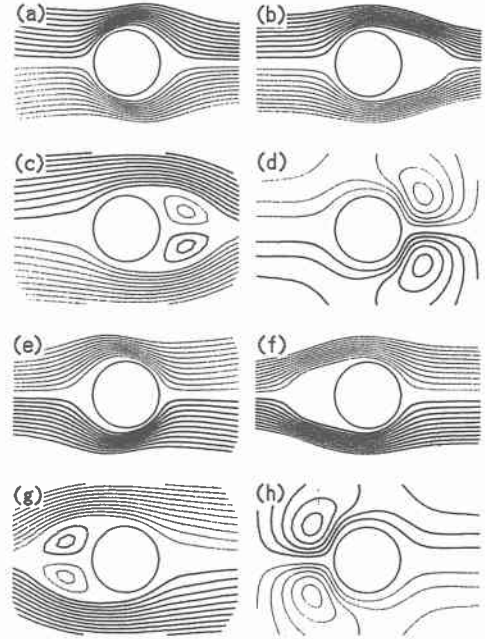


図-3 渦度の Contours  
CASE4-2  $A=1.275, \nu=0.017$

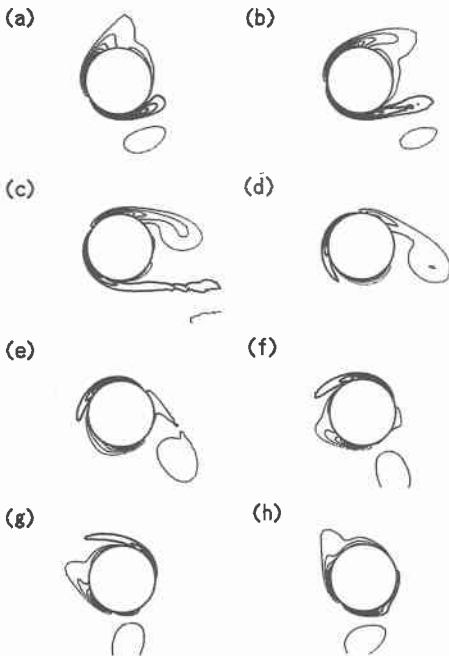


図-4 流れ関数の Contours  
CASE4-2  $A=1.275, \nu=0.017$

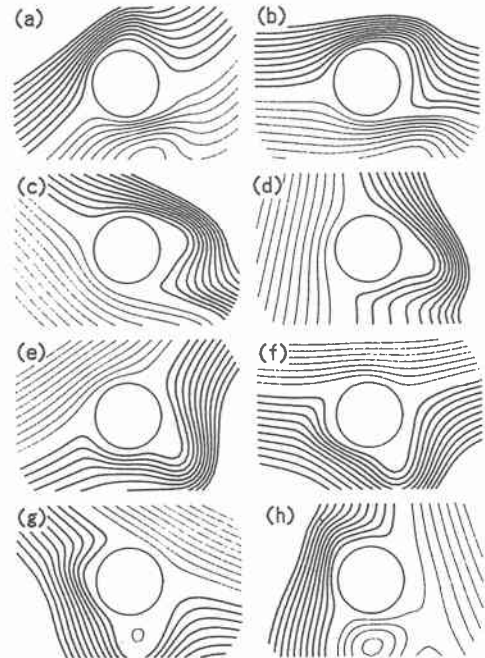


図-5 圧力場の Contours  
CASE4-2  $A=1.275$   $\nu=0.017$

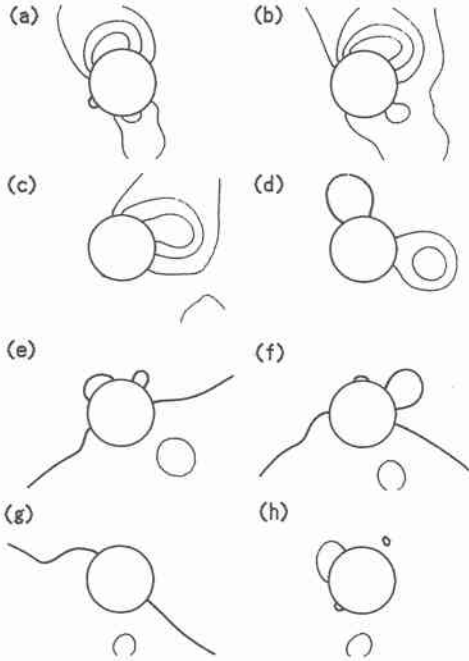


図-7 流れ関数の Contours  
CASE4-5  $A=3.185$   $\nu=0.0425$

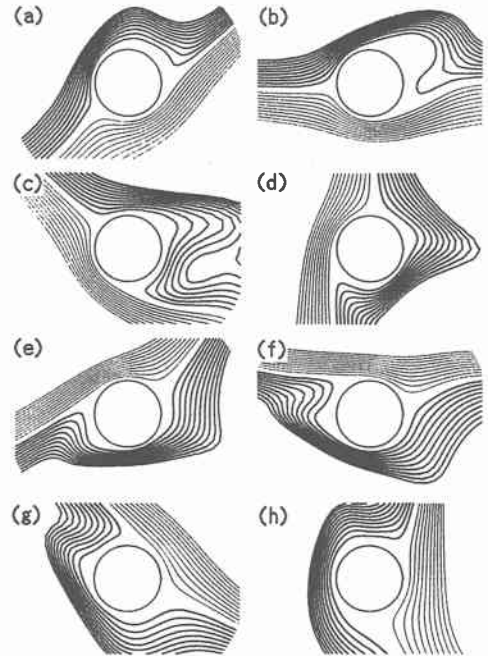


図-6 渦度の Contours  
CASE4-5  $A=3.185$   $\nu=0.0425$

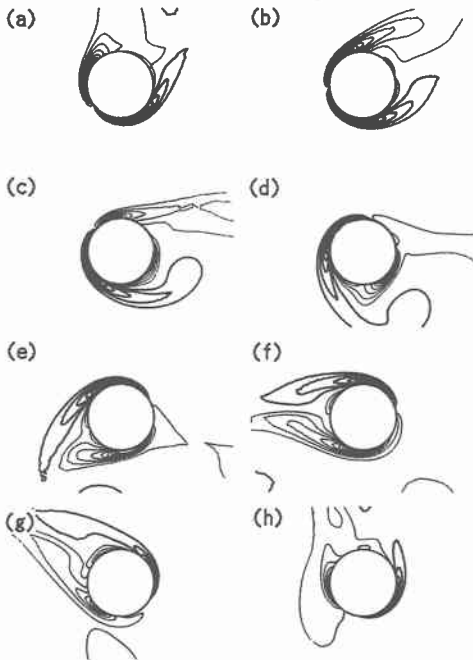
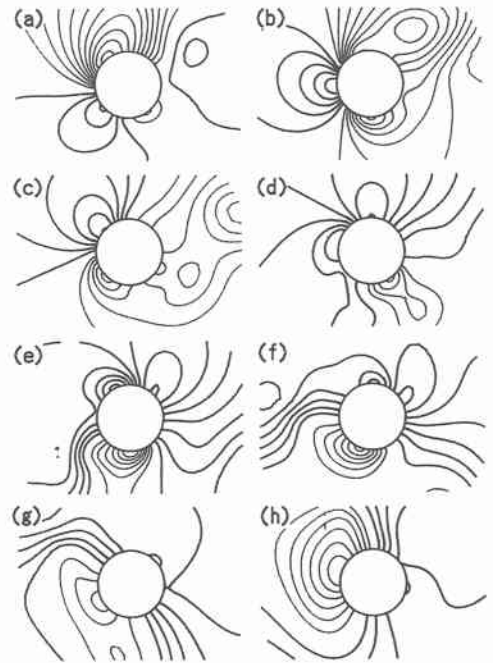


図-8 圧力場の Contours  
CASE4-5  $A=3.185$   $\nu=0.0425$



値と円柱表面上の接線方向に働くせん断力  $\tau$  を使用し、その  $p$  および  $\tau$  の水平方向成分を円柱のまわり  $\theta = 0 \sim 2\pi$  について total した値である。図中に圧力  $P$ 、せん断力  $\tau$  および  $F (= P + \tau)$  をそれぞれ実線、破線および太い一点鎖線で描いた。一方、図中に細い実線で示した微小振幅波の圧力については式 (15) より円柱表面上の値  $p_{0,0}$  を求めると、円柱表面で  $r = 0, R = e' = 1$  であるから、

$$P_{0,0} = \frac{L}{2\pi} A \frac{\cosh k(\sin\theta - h - d)}{\sinh kh} \sin(k \cos\theta - 1) \dots\dots (17)$$

であり、上式を用いて、 $p_{0,0}$  の水平方向成分を  $\theta = 0 \sim 2\pi$  について total すると

$$P_{0,0} = \sum_{m=1}^M P_{0,0,m} (-\cos\theta_m) \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = 2\pi/M \dots\dots (18)$$

である。

図-9は  $S = 4$  でストローハル数が小さい場合は、ポテンシャル流である微小振幅波の圧力に数値計算の結果は近づいているが、図-11に見られるようにストローハル数  $S$  値が  $S = 10.0$  で次第に大きくなると、微小振幅波の  $P_{0,0}$  に対して数値計算の値  $F$  は最大値が大きく突出するようになり、その最大値を与える位相は  $t = \pi/2$  程度までずれてくるといえる。(水平振動流では  $t = \pi/4$  ぐらいである。) また、同時に正方向の圧力より負側の圧力が大きく現れている。本報告では流体力の水平方向成分のみを図示したため、波動場に対する流体力の発生状況を十分説明し得てないといえる。したがって、鉛直方向成分も加え合成した流体力について検討する必要があるといえる。

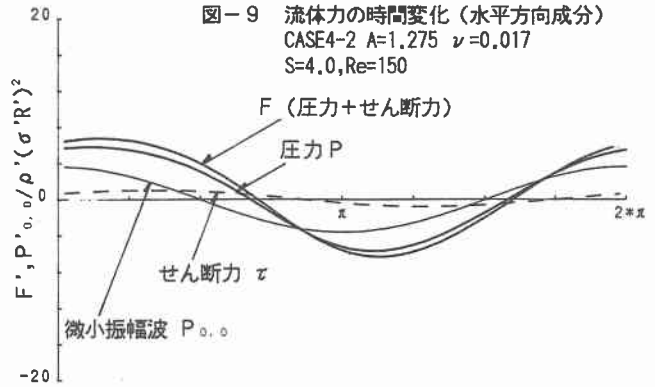


図-9 流体力の時間変化 (水平方向成分)  
CASE4-2  $A=1.275$   $\nu=0.017$   
 $S=4.0, Re=150$

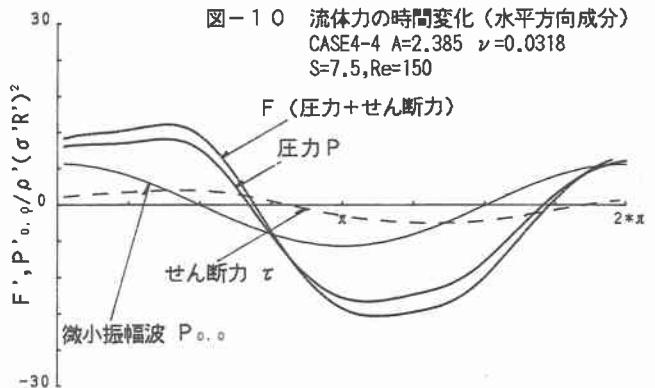


図-10 流体力の時間変化 (水平方向成分)  
CASE4-4  $A=2.385$   $\nu=0.0318$   
 $S=7.5, Re=150$

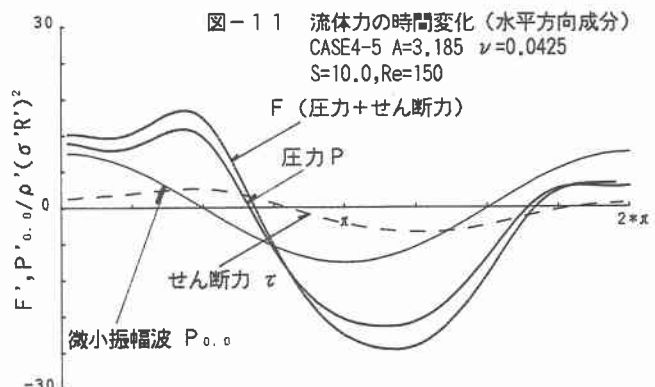


図-11 流体力の時間変化 (水平方向成分)  
CASE4-5  $A=3.185$   $\nu=0.0425$   
 $S=10.0, Re=150$

<参考文献>

佐藤・浜中; 剥離を伴った振動流中の円柱に働く流体力について  
海岸工学論文集 第40巻 (1993)