

II-52

修正グリーン関数を用いた波動場解析

北海道大学大学院 学生員 折橋 恒春
 北海道東海大学工学部 正員 浜中 建一郎

1. はじめに

任意の形状の構造物を過ぎる波の変形や波力の問題等の波動場解析を行う際、グリーンの式を用いた境界要素法がよく用いられる。この場合、特異解として主要解を用いる方法とグリーン関数を用いる方法とがある。主要解を用いる場合は、境界全域に選点を配置する必要があるため、三次元問題など広い領域を扱う場合、選点数が増加し計算機のメモリーやコストにおいて問題が生じる。しかしながらグリーン関数は、境界条件を満たすように構成されるので選点数が大幅に削減される。これらのことからグリーン関数を用いる方法が有利であると考えられる。

波動場におけるグリーン関数としては、John(1950)によって導かれたものが知られている。しかしながら、このJohnによって導かれたグリーン関数を数値解析に適用する場合、その収束性に問題があることがFenton(1978), Isaacson(1982)等によって指摘されている。また著者等(1994)は、その問題点を明らかにし、収束性の良い修正グリーン関数を断面2次元において提案している。

本研究では、修正グリーン関数を用いて波動場解析を行いその適用性を検討する。また、Johnのグリーン関数を用いた解析と比較し、収束性の違いを検討することを目的とする。

2. 修正グリーン関数

2.1 Johnのグリーン関数の収束性について

断面二次元における波動場のJohnのグリーン関数(G)は、次のように表される。全ての変量を重力加速度(g)と周波数(ω)とで無次元化して表す。

$$G = \frac{iC_0}{k} e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z_0 + h) \cosh k(z + h) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k_n} e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z_0 + h) \cos k_n(z + h) \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1 / (h + \sinh^2 kh) \\ C_n &= 1 / (h - \sin^2 k_n h) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

$$k \tanh kh = 1, \quad k_n \tan k_n h = -1, \quad k, k_n: \text{wave number} \quad \dots \dots (3)$$

このグリーン関数は、自由水面、底面の境界条件及び無限遠方での放射条件を満たす。グリーン関数に対する境界条件は(4)式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta G &= -\delta(x-x_0, z-z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= G \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } z=-h \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

δ : delta function

無限遠方(x=±∞)では放射条件を満たす

δ関数の定義を次に示す。

$$\int f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0) \dots \dots (5)$$

図1のような領域において波動場解析を行う場合、グリーン関数(G)と速度ポテンシャル(φ)をグリーン関数の定理((8)式)に適用する。速度ポテンシャル(φ)に対する基礎方程式、境界条件は次のように表される。

$$\Phi = \phi e^{-it} \dots \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= -\phi \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } z=-h \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{on the surface of structure} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

$$\int_V (\phi \Delta G - G \Delta\phi) dV = \int_S (\phi \frac{\partial G}{\partial\nu} - G \frac{\partial\phi}{\partial\nu}) dS \dots\dots(8)$$

(4)式の ΔG と(5)式の δ 関数の定義より(8)式は(9)式のように表される。

$$\phi(x_0, z_0) = - \int_S (\phi \frac{\partial G}{\partial\nu} - G \frac{\partial\phi}{\partial\nu}) dS \dots\dots(9)$$

ここでJohnは δ 関数の定義を(10)式のように拡張した。

$$\Delta G = \delta(x-x_0)\delta(z-z_0) \dots\dots(10)$$

特異点付近での速度ポテンシャルの性質とグリーン関数の対称性より、(9)式の $\partial G / \partial \nu$ が $x = x_0$ の z 軸に沿って $\delta(z-z_0)$ となることが要請される。

$$\frac{\partial G}{\partial\nu} = \frac{1}{2} \delta(z-z_0) \dots\dots(11)$$

(11)式の両辺に $\cosh k(z+h)$, $\cos k_n(z+h)$ を乗じ、底面($z=-h$)から自由水面($z=0$)まで積分すると、これらの関数の直交性と δ 関数の定義((5)式)より(2)式の C_0 , C_n が決定される。

ここで収束性の問題について考えてみるとJohnが(10)式で与えた δ 関数の定義が $x = x_0$ における z 軸上で展開項数(N)を無限大にまで増加させても収束しないことが収束性の問題の原因であると考えられる。Johnが用いた δ 関数をフーリエ級数展開する((12), (13)式)と、フーリエ核((14)式)となり展開項数を増加させても収束しないことが分かる。このことと同様のことがグリーン関数にも起こると考えられる。

$$\sum_n A_n e^{inx} = \sum_m \delta(x-x_0+2\pi m) \dots\dots(12)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \delta(x-x_0) dx = \frac{1}{2\pi} e^{inx_0} \dots(13)$$

$$\sum_n A_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\{(N+1/2)(x-x_0)\}}{\sin\{(x-x_0)/2\}} \dots(14)$$

2. 2 修正グリーン関数

2. 1で述べた問題点を改善するため、以下のような条件を満たし収束性の良い δ 関数を検討した。

$$\delta(x-x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x-x_0) \dots\dots(15)$$

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \delta_a(x-x_0) dx = 1 \dots\dots(16)$$

$$\delta_a(x-x_0) = 0 \quad (x < x_0 - a, x > x_0 + a) \quad a: \text{specific lengs of } \delta\text{-function} \dots\dots(17)$$

矩形パルス、三角形パルス、余弦パルスを検討し最も良い収束性を示した余弦パルス((18)式)を適用した。また、 δ 関数の近似としてよく用いられるガウス関数は、定義幅外での減衰が他の関数よりも緩やかであり、また、(11)式において C_0 , C_n を決定する場合、積分不能になるため適用しなかった。

$$\delta_a = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi(x-x_0)}{a} \right\} \dots\dots(18)$$

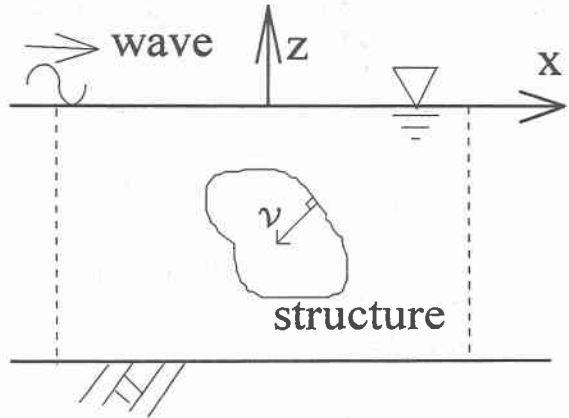


図-1 概念図

(18)式で与えた δ 関数を(11)式に代入し、同様に求めた C_0, C_n が(19)式のように表される。この C_0, C_n を適用したグリーン関数を修正グリーン関数として提案した。なお、数値計算を行う場合 a はセグメントの長さの1/2以下である必要がある。図2に(20)式で示したグリーン関数の微分と δ 関数との差(E_r)のcontourを示した。定義幅を狭くすると精度が落ちるため展開項数を増加させなければならないことが分かる。

$$C_0 = \frac{\sinh ak}{ak\{1+(ak/\pi)^2\}} / (h + \sinh^2 kh)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{\sin ak_n}{ak_n\{1-(ak_n/\pi)^2\}} / (h - \sin^2 k_n h) & \text{on } ak_n \neq \pi \\ 0.5 / (h - \sin^2 k_n h) & \text{on } ak_n = \pi \end{cases} \dots(19)$$

$$E_r = \left\{ \int_{-h}^{z_0-a} + \int_{z_0+a}^0 \right\} \left| \frac{\partial G}{\partial x} - \delta_a(z-z_0) \right| dz \dots(20)$$

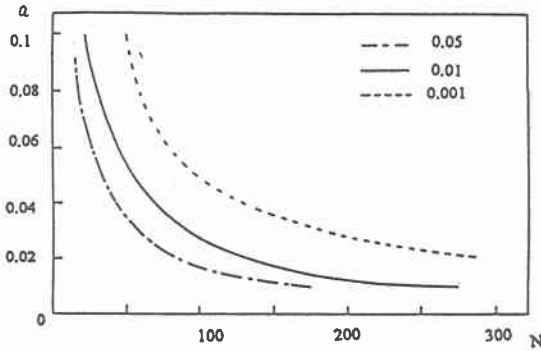


図-2 E_r のcontour

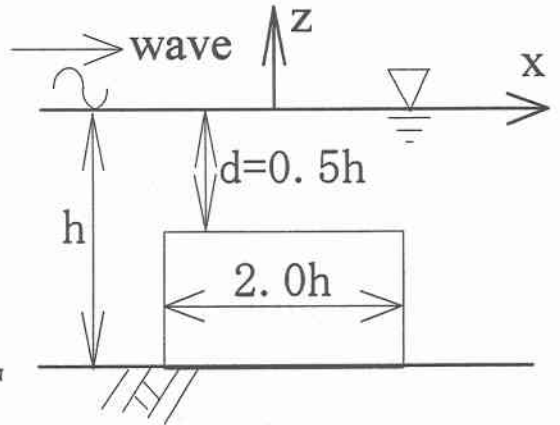
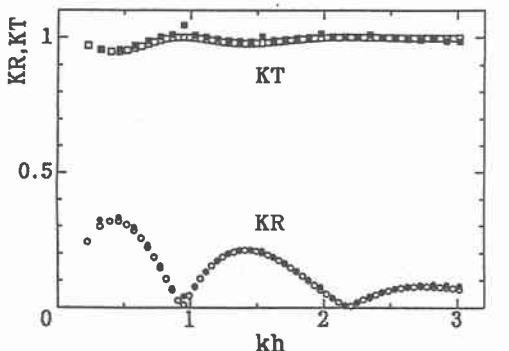
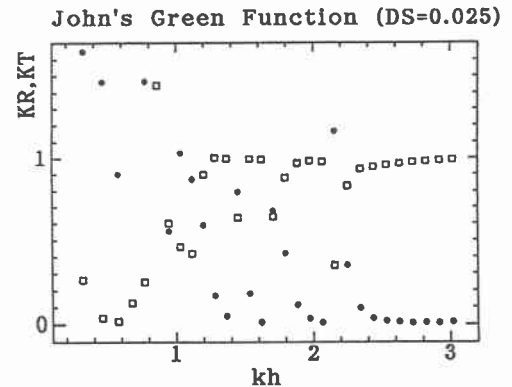


図-3



●, ■ --修正グリーン関数 (DS=0.025, N=500)
○, □ --領域分割法 (ポテンシャル接続法)

図-4 潜堤の反射率, 通過率



● --KR, □ --KT

図-5 潜堤の反射率, 通過率

3. 計算結果及び考察

修正グリーン関数を用いた解析の妥当性を調べため、図3のような水深(h)、没水深(0.5h)、幅(2.0h)の潜堤に対して解析を行い、ポテンシャル接続法と解の比較を行った(図4)。縦軸に反射率(KR)、通過率(KT)、横軸に波数(k)と水深の積(kh)を示した。

修正グリーン関数はセグメント幅(DS=0.025)、展開項数(N=500)とした。両解析はよく一致している。図5は、図4と同条件でJohnのグリーン関数を用いて解析を行った。図4とは異なる解を示し妥当な解が得られていないことが分かる。次に図6のような円柱構造物について解析を行った。水深(h=0.5)、半径(R=0.2)、没水深(D=0.25)、セグメント幅(DS=0.0042)、 δ 関数の定義幅(a=0.002)とした。縦軸には反射率(KR)、通過率(KT)、 $ENG = \sqrt{KR^2 + KT^2}$ 、横軸には展開項数(N)を示した。修正グリーン関数(図8)、Johnのグリーン関数(図9)ともに同程度の値を示している。Johnのグリーン関数が少したが解の揺らぎがあるように見える。しかしながら、図7で示す円柱と同程度の幅を持つ正方形角柱の解析を行うと、両者の違いが大きく表れる。図10は修正グリーン関数、図11はJohnのグリーン関数を用いた解析である。ともにh=0.5, 角柱の幅の1/2(R=0.2), D=0.25, DS=0.004, a=0.002である。修正グリーン関数は緩やかに解は一定値に向かい収束していくのが分かるが、Johnのグリーン関数は、収束する傾向が見られない。円柱では両者の差はあまり見られないが、潜堤や角柱のような矩形構造物については、修正グリーン関数は収束するのに対し、Johnのグリーン関数は解が収束せず適用に問題があるように見える。

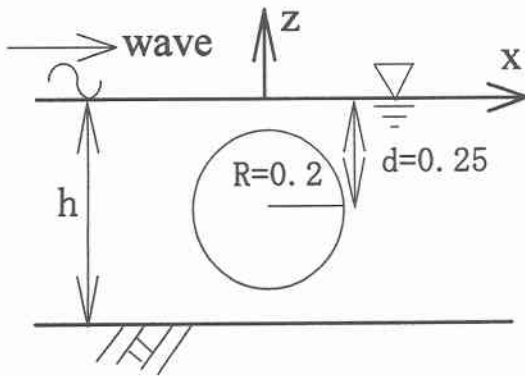


図-6

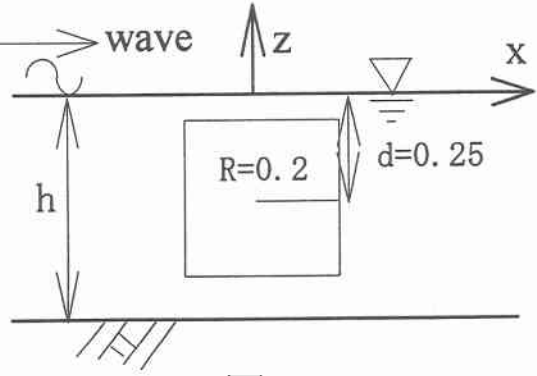
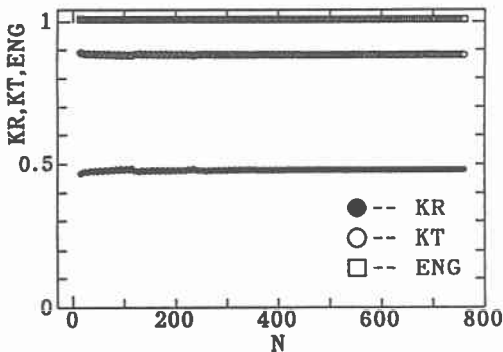
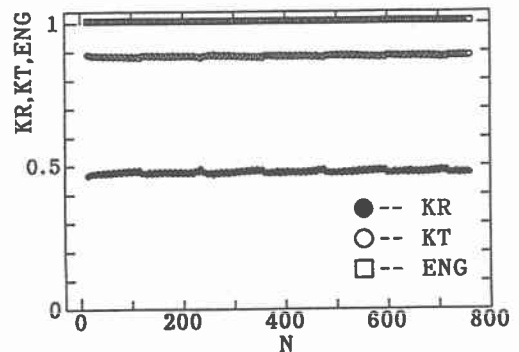


図-7



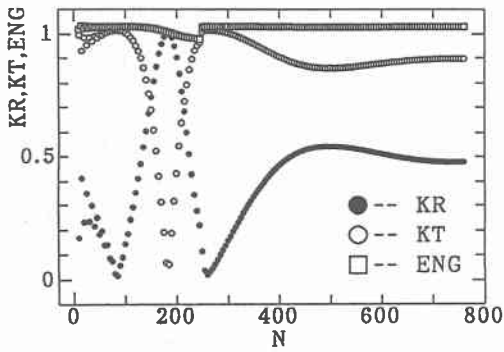
H=0.5, R=0.2, D=0.25, DL=3.0, ZP=-0.1
N2=300, DS=0.0042, 2*A0=0.004

図-8 修正グリーン関数(円柱)



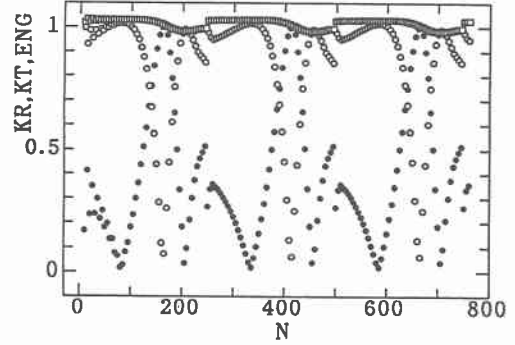
H=0.5, R=0.2, D=0.25, DL=3.0, ZP=-0.1
N2=300, DS=0.0042

図-9 Johnのグリーン関数(円柱)



H=0.5, R=0.2, D=0.25, DL=3.0, ZP=-0.1
 N2=400, DS=0.004, 2*A0=0.004

図-10 修正グリーン関数(角柱)



●-- KR ○-- KT □-- ENG
 H=0.5, R=0.2, D=0.25, DL=3.0, ZP=-0.1
 N2=400, DS=0.004

図-11 Johnのグリーン関数(角柱)

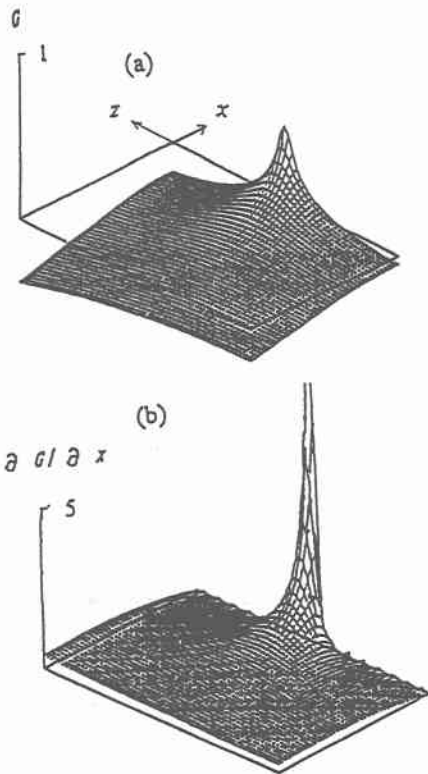


図-12 G, $\partial G/\partial x$ (修正)

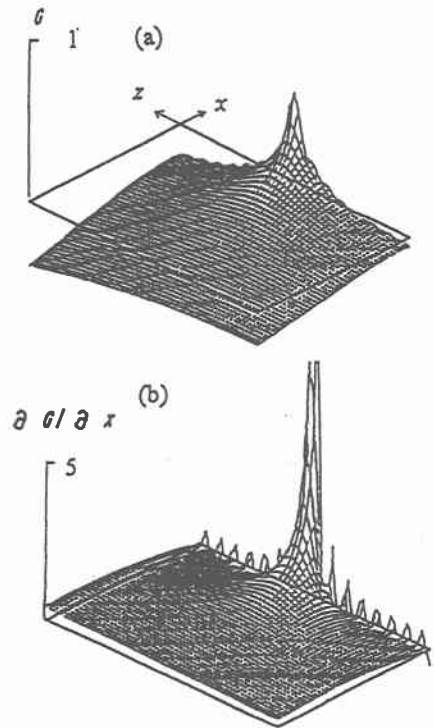


図-13 G, $\partial G/\partial x$ (John)

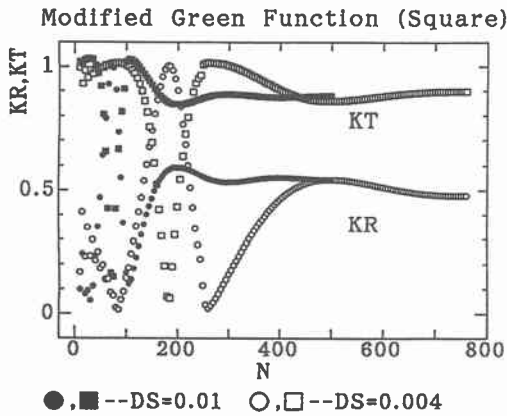


図-14 収束の早さ(角柱)

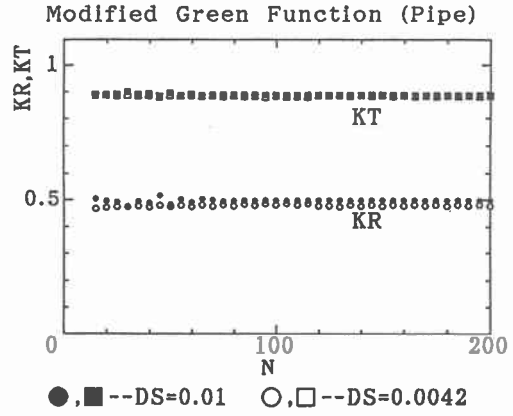


図-15 収束の早さ(円柱)

図12、13はそれぞれ修正グリーン関数、Johnのグリーン関数の値(a)とその微分値(b)($\partial G/\partial x$)($N=30, a=h/20$)を示している。左上辺(x軸)が水面、右上辺(z軸)が水深方向、縦軸がGと $\partial G/\partial x$ の値を表す。修正グリーン関数は、特異点以外での値が0に収束しているのに対しJohnのグリーン関数は収束していない。鉛直壁上有特異点がある場合、同じ鉛直壁にある他の選点にこの影響が及ぶものと考えられる。このためJohnのグリーン関数を鉛直壁を持つ矩形構造物へ適用した場合に、解が収束せず妥当な解析が行われなくなると考えられる。

図9(DS=0.004)では収束するまで展開項数を多く必要としたが、図14のようにセグメント幅を広く取ると(DS=0.01)、解の収束も早くなることが分かる。円柱においては(図15)DS=0.01としてもあまり変化は見られなかった。

4. まとめ

矩形構造物のように、鉛直壁を持つ構造物に対してJohnのグリーン関数を適用すると問題が生じることが分かった。円柱構造物については、両者に差はあまり見られなかった。今後は解析の精度を上げるため、計算ケースを増やし、分割数と展開項数の関係を調べると共に、離散化の方法などを検討していく。また、三次元への拡張についても検討していく。

参考文献

- 吉田・小島・鶴本(1989): ポテンシャル接続法の選点解法, 海岸工学論文集, 第36巻, pp. 474-478
 折橋・渡部・浜中(1994): 波動場における修正グリーン関数について, 海岸工学論文集, 第41巻, pp. 26-30.
 Fenton,J.(1978): Wave forces on vertical bodies of revolution, J.Fluid Mech., Vol.85, pp.241-255
 Isaacson,M.(1982): Fixed and floating axisymmetric structures in waves, ASCE, Vol.108, No.ww2, pp.180-199
 John,F.(1950): On the Motion of floating bodies II. simple harmonic motion, Comm.Pure Appl.Math. Vol.3, pp.45-101.
 T.Orihashi・Y.Watanabe・K.Hamanaka(1994): Modified Green Function for water wave problem, Proceedings of the international symposium Waves-Physical and numerical modelling Vol. II., pp.1002-1010.