

II-51

三次元修正グリーン関数について

北海道東海大学工学部 正員 浜中建一郎  
 北海道東海大学工学部 渡辺 勝弥

1. まえがき

一定水深の海域に置かれた構造物周囲の波動場を、Greenの公式を用いて解くために用いられるGreen関数として、唯一John(1950)によって導かれたものが知られている。このJohnのGreen関数には積分表示のものと級数表示のものがあるが、級数表示の方が理解も取り扱いも容易である。しかしながらこの級数表示されたGreen関数は、展開項数を無限大にすると特異点を通る鉛直軸に沿っていたる所で発散することが著者等(Orihashi et al:1994, 折橋・渡辺・浜中:1994)によって示され、同時にこの点を改良した断面二次元の場合のGreen関数を修正Green関数として提案された。

この事は特に、Greenの公式を離散化した数値積分で扱う場合に重要で、JohnのGreen関数では妥当な解は得られない。

本研究では同様の考えに沿って三次元波動場に対する修正Green関数を導き、その特異性について若干の考察を加える。

2. 三次元波動場とGreen関数の基礎方程式

速度ポテンシャル $\Phi$ に対して

$$\Delta\Phi = 0$$

時間的に周期的な関数を仮定して

$$\Phi' = \text{Re}\{p'e^{-i\omega t'}\} \quad \dots (1)$$

$\omega'$ :周波数,  $t'$ :時間

とする。  $\omega'$  と  $g'$ :重力加速度で変数を無次元化する。

$$\begin{cases} (x, y, z) = (x', y', z')(\omega')^2 / g' \\ t = \omega' t' \\ \phi = \phi'(\omega')^2 / (g')^2 \\ k = k' g' / (\omega')^2 \end{cases}$$

また自由水面での境界条件を線形化すると

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = \phi \quad \text{on } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -h \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on the surface of structure} \end{cases} \quad \dots (2)$$

一方Green関数Gを  $(x_0, y_0, z_0)$  で特異性を有し、構造物上の境界条件を除く(2)と放射条件を満し、 $(x_0, y_0, z_0)$  で特異性を有するGreen関数に対する基礎方程式は

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial z} = G \quad \text{on } z=0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=-h \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) = 0 \end{cases} \quad \dots (3)$$

但し (3) の第 4 式は放射条件を表し、 $r$  は特異点からの距離である。

自由水面と底面の境界条件を満たすラプラスの方程式の解の  $z$  方向の関数形は

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} & n=0 \\ \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} & n \geq 1 \end{cases}$$

(但し分散関係式)

いま  $G$  を

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \varphi_n \quad \dots (5) \quad \text{ただし } G_n = G_n(P, Q)$$

と仮定し、ラプラス方程式に代入すると

$$\nabla^2 G_n \pm k_n^2 G_n = 0 \quad \dots (6) \quad (n=0 \text{ の時}+, n \geq 1 \text{ の時}-)$$

$\nabla^2$  は  $(x, y)$  平面上の二次元ラプラス演算子

(6) 式は  $n=0$  でヘルムホルツ方程式

$n=1, 2, \dots$  で変形ヘルムホルツ方程式である。

(6) 式の解は

$n=0$  に対しては Bessel 関数、Neumann 関数、第一種 Hankel 関数、第二種 Hankel 関数

$n \geq 1$  に対しては第一種変形 Bessel 関数、第二種変形 Bessel 関数

等である。ただし  $r = PQ = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

これらのうち特異性を有し放射条件を満たす解は  $n=0$  に対して第一種 Hankel 関数、 $n \geq 1$  に対して第二種変形 Bessel 関数だから、これを採用すると  $G$  は (7) 式となる。

$$G = C_0 H_0^{(1)}(k_0 r) \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(k_n r) \varphi_n(z) \quad \dots (7)$$

次に係数  $C_0, C_n$  を決めるために、 $G$  の持つべき特異性について考える。

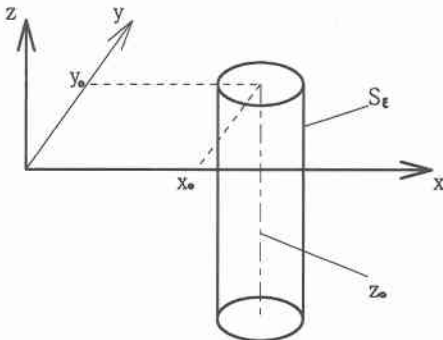


図 1 概念図

グリーンの公式を適用するため  $r=0$  の点を中心に半径  $\varepsilon$  の円を水平断面とする円柱領域を水面から水底まで取り除いた領域を考える。(図1)

この領域内で (2) を満たす  $\phi$  と (7) 式で表される  $G$  に対しグリーンの公式を適用すると

$$\int (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dV = \int \left( \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad \dots (8)$$

(8) 式の右辺はゼロ、また左辺の積分のために境界面を先に取り除いた円柱上を  $S_i$ 、それ以外を  $S_o$  とすると (8) 式は

$$S = S_i + S_o \\ \int_{S_i} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds + \int_{S_o} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds = 0 \quad \dots (9)$$

グリーン関数の特異性に関する要請は (9) 式の第一項目が  $\phi(x_o, y_o, z_o)$  を表す事である。

ここで第一種 Hankel 関数と第二種変形 Bessel 関数は共に 0 次でさらにその対称性から、ある  $z$  のもとの  $G$  の値は小円上で一定となる。また小円の半径  $\varepsilon$  が十分小さければ小円上のある位置と反対位置とは

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu_i} = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu_o}$$

従って  $G \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  に関する積分はゼロ、円周上での積分は (10) 式となる。

$$\int_{S_i} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds \quad \dots (10)$$

また第一種 Hankel 関数、第二種変形 Bessel 関数の法線方向の微分は、ある  $z$  のもとの小円の円周上で、( $r \rightarrow 0$ )

$$\frac{\partial H_o^{(0)}(k_o r)}{\partial \nu} = -\frac{\partial H_o^{(0)}(k_o r)}{\partial r} = -i \frac{2}{\pi} \\ \frac{\partial K_o(k_o r)}{\partial \nu} = -\frac{\partial K_o(k_o r)}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

また小円上の積分 (10) 式は小円上で  $\phi = \text{const}$  とすると  $2\pi r$  を掛けることになり (12) 式となる。

$$\int_{S_i} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \int_{-h}^0 \phi \left\{ -i4C_o \varphi_o(z) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi C_n \varphi_n(z) \right\} dz \quad \dots (12)$$

関数  $G$  が  $z = z_o$  で特異性を持つグリーン関数であるという事は、(12) 式の右辺の  $\{ \}$  が  $\delta(z - z_o)$  になる。

$$-i4C_o \varphi_o(z) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi C_n \varphi_n(z) = \delta(z - z_o) \quad \dots (13)$$

(13) 式の  $C_o$ 、 $C_n$  を求めるには両式の両辺にそれぞれ  $\varphi_o(z)$ 、 $\varphi_n(z)$  を掛けて  $-h \leq z \leq 0$  で積分する。また  $\varphi_o(z)$ 、 $\varphi_n(z)$  が正規完全直交関数列である事を利用する。

$$\begin{cases} C_o = -\frac{\cosh k_o(z_o + h) \cosh k_o h}{i2} \times \frac{k_o^2 - 1}{h(k_o^2 - 1) + 1} \\ C_n = \frac{\cos k_n(z_o + h) \cos k_n h}{\pi} \times \frac{k_n^2 + 1}{h(k_n^2 + 1) - 1} \end{cases} \quad \dots (14)$$

(14) 式を (7) 式に代入すると

$$G = \frac{i}{2} \frac{k_o^2 - 1}{h(k_o^2 - 1) + 1} \cosh k_o(z_o + h) \cosh k_o(z + h) H_o^{(0)}(k_o r) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi h(k_n^2 + 1) - 1} \cos k_n(z_o + h) \cos k_n(z + h) K(k_n r) \quad \dots (15)$$

### 3. 三次元修正グリーン関数の構成

前節で三次元波動場におけるJohnのグリーン関数を導出したが、彼の導出法ではz軸上で解析的な $\delta$ 関数が用いられており、この事によって収束性を悪くしている事が著者等によって指摘された。この点を改善するために断面二次元の場合と同様収束性の良い余弦インパルス(16)式を $\delta$ 関数の近似式として採用する。

$$\delta_a = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{a} (z - z_0) \right\} \quad |z - z_0| < a \quad \dots (16)$$

$$\delta_a = 0 \quad |z - z_0| > a$$

(16)式の $\delta$ 関数を(13)式の右辺に代入し、前節と同様の方法で $C_0$ 、 $C_n$ を求める。

$$C_0 = -\frac{\cosh k_0(z_0+h)\cosh k_0 h}{i2} \frac{k_0^2 - 1}{h(k_0^2 - 1) + 1} \frac{\sinh k_0 a}{ak_0} \left\{ \frac{1}{1 + (ak_0/\pi)^2} \right\} \quad \dots (17)$$

$$C_n = \frac{\cos k_n(z_0+h)\cos k_n h}{\pi} \frac{k_n^2 + 1}{h(k_n^2 + 1) - 1} \frac{\sin k_n a}{ak_n} \left\{ \frac{1}{1 - (ak_n/\pi)^2} \right\}$$

(17)式を(7)式に代入すると、三次元修正グリーン関数が求まる。

$$G = \frac{i}{2} \frac{k_0^2 - 1}{h(k_0^2 - 1) + 1} \cosh k_0(z_0+h)\cosh k_0(z+h)H_0^{(1)}(k_0 r) \frac{\sinh k_0 a}{ak_0} \left\{ \frac{1}{1 + (ak_0/\pi)^2} \right\} \quad \dots (18)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi h(k_n^2 + 1) - 1} \cos k_n(z_0+h)\cos k_n(z+h)K(k_n r) \frac{\sin k_n a}{ak_n} \left\{ \frac{1}{1 - (ak_n/\pi)^2} \right\}$$

### 4. 修正グリーン関数の特異性の検討

図2は修正グリーン関数とそのr方向、z方向の微係数である。(但しr方向微分は小円上で積分してある。)条件は、無次元水深： $h=1$ ，展開項数： $N=10$ ，特異点： $(x_0, y_0, z_0)=(0, 0, -0.5)$ ， $\delta$ 関数の定義幅： $2.0a=h/10$ である。同一条件下におけるJohnのグリーン関数とr，z方向の微係数は、展開項数が少ないために図2との違いが見られず、そのために図を省略した。図3は上から順にJohnのグリーン関数とそのr方向、z方向の微係数である。また図4は修正グリーン関数とそのr方向、z方向の微係数である。(但しr方向微分は小円上で積分してある。)条件は、無次元水深： $h=1$ ，展開項数： $N=30$ ，特異点： $(x_0, y_0, z_0)=(0, 0, -0.5)$ ， $\delta$ 関数の定義幅： $2.0a=h/10$ としている。Johnのグリーン関数においては、特異点を通る鉛直線上で強い揺らぎが存在していることが、特にr，z方向に微分した図で顕著に示されており断面二次元の場合と同様に展開項数の増加に従って発散する様子が示されている。修正グリーン関数においては、前述のこの発散性は改善されている。

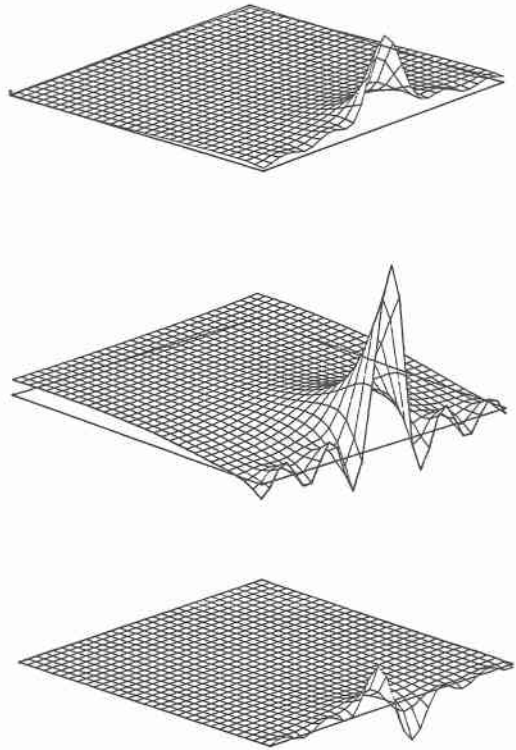


図2 修正グリーン関数

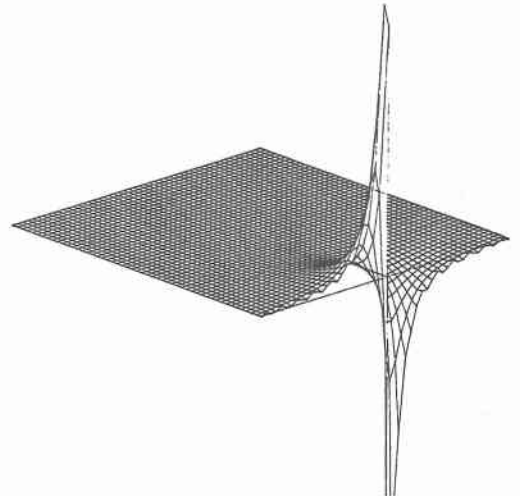
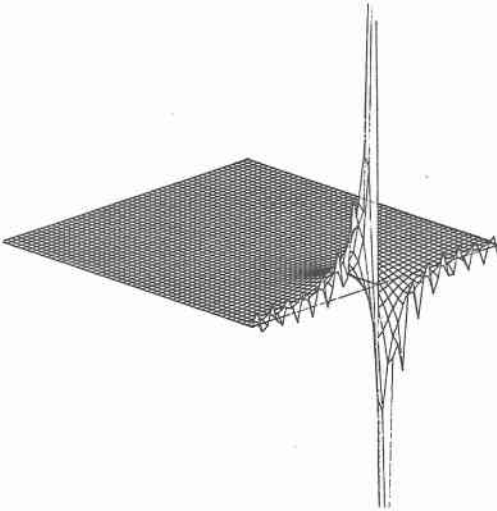
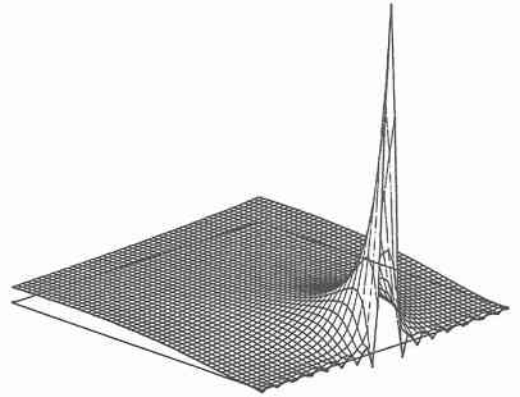
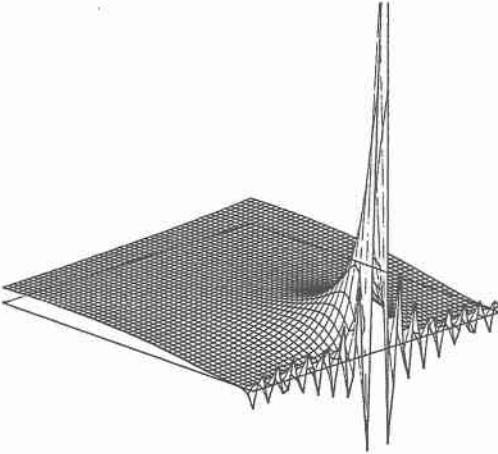
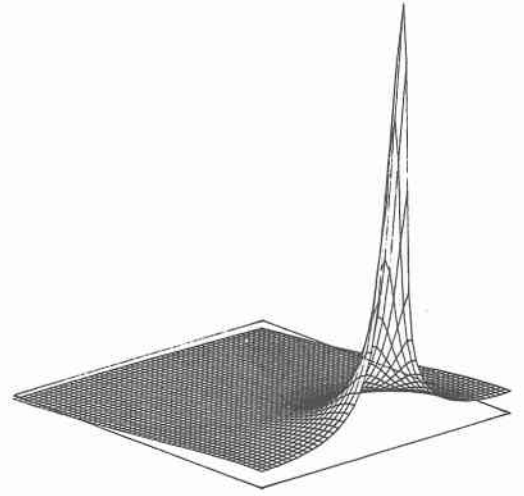
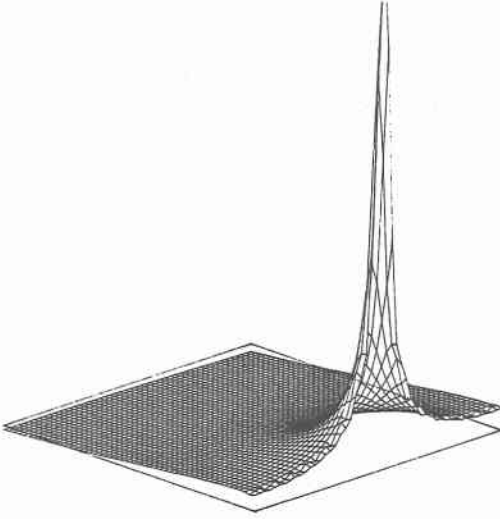


図3 Johnのグリーン関数

図4 修正グリーン関数

図5は図2と同じ条件で特異点の位置を水底  $z_0 = -1.0$  に置いた場合の修正グリーン関数の値である。図2と比較すると特異点での値が2倍になっている。これは半幅の近似デルタ関数に対し、特異点が中央部にある場合と同じ面積を割り当てていることによる。このことは、このグリーン関数を用いグリーンの公式の数値積分により問題を解く場合に水底あるいは水面上での積分に特別な考慮をする必要がないことを意味する。図6は図5と同じ条件での  $r$  方向微分である。図3の比較は関数値の場合と同様である。

図7は図2と同じ条件で水深を半分  $h = 0.5$  にした場合のグリーン関数の  $r$  方向の微係数である。水深を半分にしたことにより近似デルタ関数の定義幅も半分になり、同じ展開項数では揺らぎが大きくなっている。

### 5. 結論

(1) 波動場におけるJohnのグリーン関数の発散性を改良した修正グリーン関数を三次元波動場に対して導出した。

(2) 三次元修正グリーン関数の特異性の特徴を種々の条件のもとで検討した。

(3) グリーンの公式を用いて波動場を解くには主要解を用いる方法もあるが、その方法では周囲の仮想境界も含めた全ての境界面上のセグメントに未知数を配置する必要がある。しかしグリーン関数を用いれば、未知数は構造物表面上のセグメントだけに配置すれば良く、特に三次元問題の場合は圧倒的に有利である。

(4) 今後本研究で導出した三次元グリーン関数を用いた波動場の解析を進めていきたい。

### 参考文献

- John, F. (1950) : On the motion of floating bodies II-simple harmonic motion, *Comm. Pure Appl. Mech.*, Vol. 3, pp. 45-101
- Orihashi, T., Y. Watanabe and K. Hamanaka (1994) : Modified Green function for water wave problem, *Int. Symp. Waves*, Vol II, pp. 1002-1010
- 折橋恒春・渡部靖憲・浜中健一郎 (1994) 波動場における修正グリーン関数について、*海岸工学論文集*、第41巻、(1)、pp. 26-30

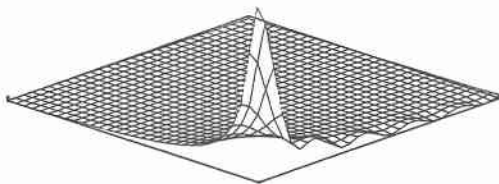


図5 修正グリーン関数  $z_0 = -h$

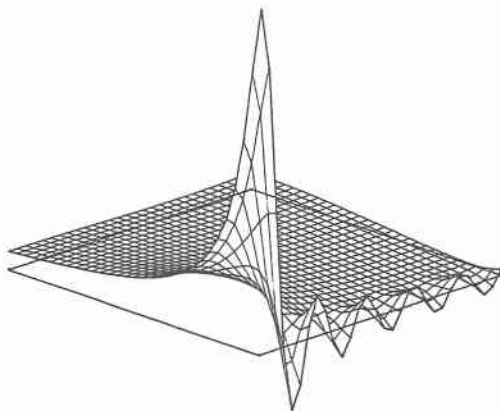


図6 修正グリーン関数  $r$  微分  $z_0 = -h$

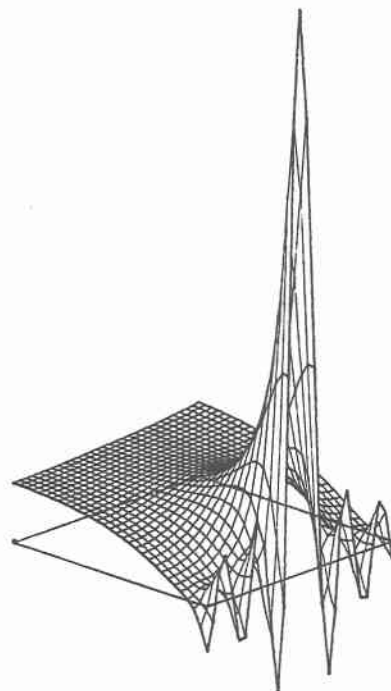


図7 修正グリーン関数  $r$  微分  $h = 0.5$