

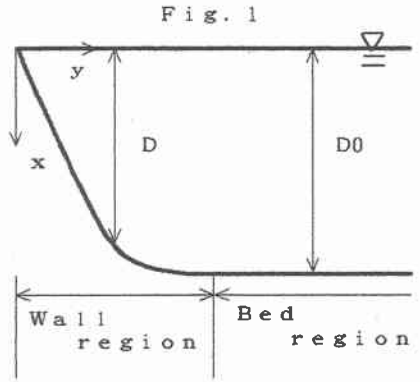
II-47

河岸侵食と安定河岸横断形状に関する研究

北海道大学工学部 学生員 杉田 泰俊  
 北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男  
 北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

Parker (1978) は、Lundgren & Jonson (1964) が提案した、断面内の乱れによる横断方向の運動量輸送を考慮したせん断力分布の算定式を基に動的安定横断形状を初めて説明する事に成功した。Parkerの理論は極めて精緻なものではあるが最終的に得られた1次近似のせん断力分布に横断方向の運動量輸送が含まれていない、礫床河川と砂床河川という区分方法が適当かどうかについて等は更に検討の余地が残されている。前者について板倉・黒木らは最小限ではあるが、横断方向の運動量輸送が含まれた式を考案した。本論文では、その式を基に礫と砂の混ざった2粒径の河床を考えていく。



2. 支配方程式の誘導

安定河岸横断形状としてFig.1を考える。水際より中央方向にy軸をとり水面から鉛直下方向にx軸をとり、中央部の水深をD<sub>0</sub>、局所水深をDとする。2粒径モデルとして、浮遊も掃流もする粒径d<sub>1</sub>、掃流しかしない粒径d<sub>2</sub>がそれぞれp<sub>1</sub>、p<sub>2</sub>の割合で存在する河床を考える。

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (1)$$

浮遊差の連続式をx方向に積分すると連続式は次のように表される。

$$-\frac{\partial F_L}{\partial y} = -q_{su} + w_s C_{x=h} \quad (2)$$

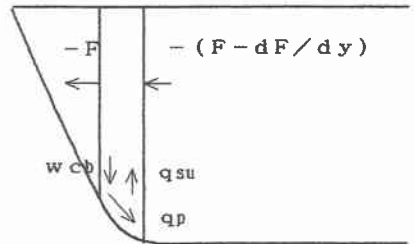
ここでF<sub>L</sub>は横断方向の浮遊砂フラックスを水深方向に積分した全浮遊砂フラックス、w<sub>s</sub>は沈降速度、q<sub>su</sub>は河床からの砂の巻き上げ量、cは河道内各点の時間平均浮遊濃度である。

次に掃流砂の連続式を考える。河床が安定となるためには中央方向の掃流砂量と河岸方向の浮遊砂フラックスがつり合わなければならないので次式が成り立つ。

$$F_L + q_p = 0 \quad (3) \quad q_p; \text{横断方向の全掃流砂量}$$

(1)、(2)、(3)と後にでてくるせん断力式(12)を基本式として解いていく。(Fig.2参照)

Fig. 2



(a) 浮遊砂の巻き上げ量と堆積量

浮遊砂の横断及び鉛直方向の拡散係数 ( $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ ) は断面内で一定と仮定し、それぞれ実測地より0.2, 0.1を採用する。河床上の巻き上げについては横断方向の拡散の影響はほとんど受けないので鉛直方向の浮遊砂フラックスは次のようになる。

$$w_s c - \varepsilon \delta c / \delta x = 0 \quad (4)$$

河床上 ( $x=0$ ) を基準面として (4) を解くと基準面の巻き上げ量は次のように表せる。

$$q_{su} = \varepsilon (\delta c / \delta x)_{x=D} = w_s q_{su} \quad (5)$$

$q_{su}$  は無次元巻き上げ量

横断方向に拡散がない場合、基準面でも巻き上げ量と堆積量はつり合っているため次式が成り立つ。

$$q_{su} = c_{x=D} \quad (6)$$

今回は浮遊砂の巻き上げが摩擦抵抗による底面せん断応力似によって生ずると考えて次式を用いる。

$$c_{x=D} = 0.0025 (u_{xG} / w_s)^2 \quad (7)$$

$$(5)、(6)、(7) を用いて 巻き上げ量 \quad q_{su} = 0.0025 (u_{xG} / w_s)^2 \quad (8)$$

$u_{xG}$  は摩擦抵抗による局所摩擦速度

堆積量は横断方向の拡散を考えて浮遊砂濃度の状態量で表さなければならない。浮遊砂濃度の分布形状は指数分布で良く表現できることが観測されているので  $c$  は次式で表される。

$$c = c_{x=D} \exp(-w_s(D-x)/\varepsilon) \quad (9)$$

水深方向に積分して、 $z$  と置く。

$$z = \int_0^D c \, dx = \frac{\varepsilon}{w_s} \left( 1 - \exp\left(-\frac{w_s}{\varepsilon} D\right) \right) \quad (10)$$

$$w_s D / \varepsilon \ll 1 \text{ より } (10) \text{ は次のように近似できる。} \quad w_s c_{x=D} \approx w_s^2 z / \varepsilon \quad (11)$$

(b) せん断力

せん断力  $\tau$  に関しては板倉らは Stress depth を  $D_0$  で無次元化した  $\sigma$  を使い次のように表している。

$$\sigma = 1 + \psi_0 \frac{d\sigma}{d\eta} \quad (12)$$

ただし、 $\sigma = \delta / D_0$ 、 $\delta = \tau / \rho g I_0$ : Stress depth、 $\psi_0 = (1/12 \ln(30D_0/k) - 5/72) (1 + 1/(2 \ln(30D_0/k) - 7/13))$

$I_0$ : 河床縦断勾配、 $\eta = y / D_0$

(c) 掃流砂量

流下方向の掃流砂量式は Meyer-Peter Muller 公式を用いる。

$$q_B = 8 \sqrt{R_S g d^3} (\tau_{xG} - \tau_{xcr})^{1.5} \quad (13)$$

$R_S = \rho_s / \rho - 1$ 、 $\rho_s$ : 砂粒子の密度、 $\tau_{xG}$ : 摩擦抵抗に対応する Shields せん断力、 $\tau_{xcr}$ : 限界 Shields せん断応力 (=0.047)

横断方向の掃流砂量は

$$q_p = q_B \tan \phi = q_B \sqrt{\frac{1}{\mu_s \mu_k} \frac{\tau_{xcr}}{\tau_{xG}} \frac{\partial D}{\partial y}} \quad (14)$$

$\mu_s$ : 静止摩擦係数、 $\mu_k$ : 運動摩擦係数、

全 Shields せん断応力  $\tau_s$  と摩擦抵抗に対応する Shields せん断応力  $\tau_{xG}$  との関係については次の砂堆床における Engelund Hansen の式を用いる。

$$\tau_{xG} - \tau_{xcr} = 0.4 \tau_s^2 \quad (15)$$

浮遊砂が活発に動いている状態では  $\tau_{xG} \gg \tau_{xcr}$  なので (8)、(13) は近似できる。

### 3. 解法

基本式 (1) (2) (3) (12) にそれぞれの値をいれると次の5つの微分方程式となる。

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( p_1 c_{11} \sigma^2 \frac{\partial D}{\partial y} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( p_2 c_{12} \sigma^2 \frac{\partial D}{\partial y} \right) + c_2 \sigma^2 - \frac{w_s^2}{e} Z = 0 \quad (18)$$

$$-e_v \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{w_s}{e} Z \frac{\partial D}{\partial y} \right) + c_3 \sigma^2 \frac{\partial D}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$\sigma = 1 + \psi_0 \frac{d\sigma}{d\eta} \quad (20)$$

ここで  $c_{11,12} = 2.024 \sqrt{R_s g d_{1,2}} \sqrt{\frac{1}{\mu_s \mu_k} \sqrt{\frac{\tau_{xcr}}{0.4} \left( \frac{I_0}{R_s d_{1,2}} \right)}}$ 、 $c_2 = p_1 c_{11} + p_2 c_{12}$

$$(20) \text{ より } \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \frac{1}{\psi_0} \delta + \frac{1}{\psi_0} = 0 \quad (21)$$

これは線形微分方程式なので、その一般解は次のようになる。

境界条件 ( $\xi=0$  で  $\sigma=0$ 、 $\xi \rightarrow \infty$  で  $\sigma=1$ ) を考えると  $\sigma$  は次のように表される。

$$\sigma = 1 - \exp(-a\xi) = 1 - \exp\left(-a \frac{y}{D_0}\right) \quad (22)$$

$$(22) \text{ の両辺を } y \text{ で積分して整理し } p_1 \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{A}{c_{11}} \sigma^{-2} \quad (23)$$

$$(16) \text{ より } p_2 \text{ についても同様の式にして } p_2 \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{A}{c_{11}} \sigma^{-2} \quad (24)$$

$$(18) \text{ に代入して } \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_{12} \sigma^2 \left( \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{A}{c_{11}} \sigma^{-2} \right) \right\} + c_2 \sigma^2 - \frac{w_s^2}{e} Z = 0$$

第1項の後半は定数となり消去できるので、Zについて整理すると

$$Z = \frac{e}{w_s^2} \left\{ c_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta^2 \frac{\partial D}{\partial y} \right) + c_2 \delta^2 \right\} \quad (25)$$

(23)、(24)、(25) を (19) に代入して

$$\begin{aligned} -e_v \left[ \frac{e}{w_s^2} \left\{ c_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \delta^2 \frac{\partial D}{\partial y} \right) + c_2 \frac{\partial}{\partial y} (\delta^2) \right\} \right] \\ + \frac{e_v w_s}{e} \left[ \frac{e}{w_s^2} \frac{\partial D}{\partial y} \left\{ c_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta^2 \frac{\partial D}{\partial y} \right) + c_2 \delta^2 \right\} \right] + c_{12} \delta^2 \frac{\partial D}{\partial y} + A \left( 1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) = 0 \end{aligned}$$

上式をDについて整理すると

$$f_1 \frac{\partial D}{\partial y} + f_2 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + f_3 \frac{\partial^3 D}{\partial y^3} + f_4 \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)^2 + f_5 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + f_6 = 0 \quad (26)$$

(26) 式は非線形なので解析解は得られない。しかしDのみの関数であるので差分化する事によって近似解を求めることはできる。その場合の境界条件は  $y=0$  (水際) で  $D=0$ 、 $\delta D/\delta y = \phi$  (安息角)、 $\sigma=0$ 、 $y \rightarrow \infty$  (中央部) で  $D \rightarrow D_0$  (一定)、 $\delta D/\delta y = 0$ 、 $\sigma \rightarrow 1$  となる。中央部の境界条件より  $f_6 = 0$  が導かれる。

#### 4. 数値計算と考察

以下の条件で計算を行った

$$I_0=1/1000 \quad d_1=10\text{mm} \quad d_2=0.2\text{mm} \quad D_0/k=100 \quad \phi=35\text{度}$$

ここで問題となるのは積分定数Aである。(26)式において中央部の境界条件より

$$f_0 = -2 \frac{E_y E}{W_s} c_2 \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} + A \left( 1 - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) = 0$$

ここで  $\sigma \rightarrow 1$ ,  $\delta \sigma / \delta y \rightarrow 0$  なので第2項が0となる。A=0ならば一様粒径なので  $c_{11}=c_{12}$  が導かれる。

$d_1 \neq d_2$  を考えてここでは  $d_m = p_1 d_1 + p_2 d_2 \approx 5.01\text{mm}$  で近似し  $c_{11}=c_{12}=c_m$  とする。

$$c_m = 2.024 \sqrt{R_s g d_m} \sqrt{1 / \mu_s \mu_k} \sqrt{\tau_{*cr} / 0.4} (I_0 / R_s d_m)$$

積分定数Aについては一意には定まらないので  $0 < p_1 < 1$  の条件に合うようなAを後で選んだ。

数値計算を行った結果の安定断面を Fig. 3 に示す。Wall Region の幅に関しては板倉らの式と同様に  $\zeta_B = 2.02$  となった。これは Parker の値とも同程度である。

横断面内の粒度分布については Fig. 4 に示す。(23)式に表れるように  $\sigma$ ,  $\delta D / \delta y$  で割るので1と原点付近では無限大に発散する。 $0 < p_1 < 1$  であるのにこの値は明らかにおかしい。原因としては第一に  $d_m$  を近似して  $c_{11}, c_{12}$  を定数として扱ったことがあげられる。しかし、この値をyの関数にすると完全に数値計算になってしまう。完全な数値計算は今後の課題としておく。

第二に考えられるのは数値計算の誤差である。3階微分までを差分で行ったがこの誤差についても原因と考えられる。

#### 5. 結論

本論文で得られた結果は以下の通りである。

- 1) Parkerの理論にせん断力近似の改良を加えて、2粒径での安定横断河床形状を求めた。
- 2) その結果、不完全ではあるが安定河床横断面内の砂礫の粒度分布を理論的に求められた。

#### <参考文献>

- 1) 泉典洋, 池田俊介: 直線河床河川の安定横断河床形状  
土木学会論文集No. 429 II -15PP57-66. 1991
- 2) 板倉忠興, 黒木幹男, 森明巨: 安定河道幅に関する研究
- 3) Gary Parker: Self-formed straight river with equilibrium banks and mobile bed. Part I

Fig.3 横断面形状

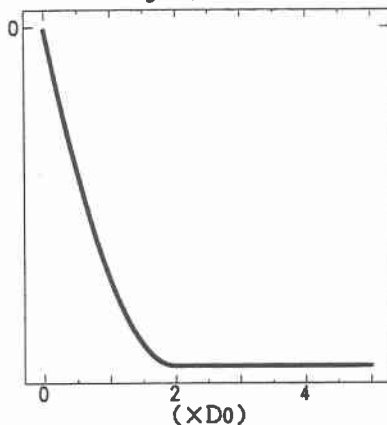


Fig.4 横断方向の粒径分布(p1)

