

洪水時に特有な流速分布に関する研究

北海道大学工学部 学生員 市埜 順也
 北海道大学工学部 正 員 長谷川和義
 北海道大学工学部 正 員 清水 康行

1. はじめに

流れに関する問題は現代水理学の最重要課題である。そして、これまでに様々な実験、研究が行われ、その都度、数々の問題が解明されてきた。しかし、それらのほとんどは実験室規模のものであり、現実の河川における計測を基にした研究はまだ十分には行われていない。

本研究は、その現実の河川における計測、しかも洪水時の河川の上昇期から下降期にかけての流速の計測から、洪水時に特有な流速分布を解明しようとするものである。これは、1990年の長谷川・大串ら⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾の石狩河口橋での小洪水における流速の計測によって明らかになったものであり、洪水上昇時からピーク時にかけて、流速分布が通常の放物線形とは異なり、水深の中央より少し下の位置に頂部を持つ中膨らみの分布を示すことが見いだされたことに発端を持っている。その解析は既に長谷川・大串ら⁽²⁾⁽³⁾によってなされているが、その後、理論式中に含まれるパラメータを観測値に最も良く合うように合わせた場合に重大な矛盾が生ずる(イメージ-勾配が負になるなど)ことが判明した。本研究は今回はこの矛盾が非定常項を無視した為に起こるものと考え、より合理的な解決を目的として論を進めたものである。

また、今年は豊平川での流速計測も行ったので、その結果も併せて載せる。

2. 洪水時における流速分布式の誘導

計測点を通り鉛直軸に平行なひとつの流面を考える。流面が平均河床面に交わる線に沿いx軸をとり、鉛直軸に沿って上向きにz軸をとる。

この時、非定常の運動方程式と連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = g i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (1)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

u = 任意点の流下方向流速、 w = 鉛直方向流速、 p = 圧力、 τ_{xz} = z軸に直向する面におけるx方向せん断力、 h = 水深、 i = 河床勾配、 U = 水深平均流速、 g = 重力加速度、 ρ = 水密度、 t = 時間。

いま洪水波が変形せずに伝わるものと仮定すると、時間微分項は $\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$ と変換することができる。

(ただし、 c = 洪水伝播速度)。このとき式(1)は、

$$-c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = g i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (4)$$

式(4)の左辺第3項を十分小さいとみなして、省略する。

$$-c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} = g i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (5)$$

今、流速 u を水深方向に平均した $U(x)$ と、 $U(x)$ からのずれの量 $U\phi(\xi)$ とに分けて表す。

ただし、 ζ は z を水深 h で無次元化したものである。

$$u = U(x) \{1 + \phi(\zeta)\} \quad , \quad \zeta = \frac{z}{h} \quad (6)$$

定義上、 $\int_0^1 \phi d\zeta = 0$ が満たされなければならない。

せん断力は、Boussinesq近似が成り立つものとして、式(7)を与える。また渦動粘性係数は式(8)で表されるものとする。

$$\frac{\tau_{zx}}{\rho} = \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon_x \frac{U}{h} \frac{d\phi}{d\zeta} \quad (7) \quad \varepsilon_x = \kappa u_x h \zeta (1 - \zeta) \quad (8)$$

ε_x = 渦動粘性係数、 u_x = 摩擦速度。

式(5)に式(6)を代入して整理すると、式(9)ようになる。ただし高次項を省略することにする。

$$-c \frac{dU}{dx} (1 + \phi) + \frac{dU^2}{dx} (1 + 2\phi) = g i - g \frac{dh}{dx} + \kappa u_x \frac{U}{h} \zeta (1 - \zeta) \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \kappa u_x \frac{U}{h} (1 - 2\zeta) \frac{d\phi}{d\zeta} \quad (9)$$

次に、式(4)を水深方向に積分して、

$$h \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} h \frac{dU^2}{dx} = g h i - g h \frac{dh}{dx} - u_x^2 \quad (10)$$

式(9)、(10)の両辺から $\frac{dU}{dx}$ 、 $\frac{dU^2}{dx}$ を消去して、

$$c(1 + 3\phi) \frac{1}{h} (c - U) \frac{dh}{dx} + (1 + 4\phi) g \left(i - \frac{dh}{dx} \right) - 2(1 + 2\phi) \frac{u_x^2}{h} - \kappa u_x \frac{U}{h} (1 - 2\zeta) \frac{d\phi}{d\zeta} + \kappa u_x \frac{U}{h} \zeta (1 - \zeta) \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = 0 \quad (11)$$

ここで、置き換えをする。

$$i - \frac{dh}{dx} = I \quad \frac{u_x^2}{gh} = i_f \quad \frac{U}{\sqrt{gh}} = Fr \quad (12)$$

ただし、 I = 水面勾配、 i_f = 摩擦勾配、 Fr = Frud数。

これを整理すると、式(12)は次のようになる。

$$\zeta(1 - \zeta) \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + (1 - 2\zeta) \frac{d\phi}{d\zeta} + \frac{1}{\kappa Fr \sqrt{i_f}} \left[3 \left(\frac{c}{U} - 1 \right) \left(\frac{1}{U} \frac{dh}{dt} \right) Fr^2 + 4(i_f - I) \right] \phi = \frac{1}{\kappa Fr \sqrt{i_f}} \left[\left(\frac{c}{U} - 1 \right) \left(\frac{1}{U} \frac{dh}{dt} \right) Fr^2 + I - 2i_f \right] \quad (13)$$

これを、 $y = 1 - 2\zeta$ で変換する。

$$(1 - y^2) \frac{d^2\phi}{dy^2} - 2y \frac{d\phi}{dy} + n(n + 1)\phi = f(x) \quad (14)$$

$$\text{ただし、} n(n + 1) = \frac{1}{\kappa Fr \sqrt{i_f}} \left[\left(\frac{c}{U} - 1 \right) \left(\frac{1}{U} \frac{dh}{dt} \right) Fr^2 + 4(i_f - I) \right] \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{1}{\kappa Fr \sqrt{i_f}} \left[\left(\frac{c}{U} - 1 \right) \left(\frac{1}{U} \frac{dh}{dt} \right) Fr^2 + I - 2i_f \right] \quad (16)$$

式(14)はLegendre型の微分方程式であり、一般解は次式のように表される。

$$\phi(y) = f \phi_1(y) p_1(y) - f \phi_2(y) p_2(y) \quad (17)$$

ただし、 ϕ_1, ϕ_2 は同次式の解で次の形をしている。

$$\phi_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} y^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} y^4 - \frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} y^6 + \dots$$

$$\phi_2 = y - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} y^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} y^5 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} y^7 + \dots$$

一方、 p_1, p_2 は非同次式の特解を構成する関数で、以下のように求められる。

$$p_1 = \int_0^y \phi_2 d\xi, \quad p_2 = \int_0^y \phi_1 d\xi \quad (p_1, p_2 \text{ の積分定数を } c_1, c_2 \text{ とする。})$$

Legendreの微分方程式は、 n が固有値として整数をとる場合には有限級数となり、 $y = \pm 1$ の境界値も有限確定する事が知られているが、 n が非整数のときは無限級数となる他、 $y = \pm 1$ の有限性は保証されない。そこで境界条件として河床近傍の $y = 1 - 2a$; ($\xi = a$) での平均流速からのずれが、 $-\delta$ であるものとし、水面近傍の $y = -1 + 2a$; ($\xi = 1 - a$) でせん断力が0となるものとする。また、河床近傍から水面近傍までの積分値が0となることにより次の3つの条件が得られる。

$$\phi \Big|_{y=1-2a} = -\delta \quad (18) \quad \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y=-1+2a} = 0 \quad (19) \quad \int_{1-2a}^{-1+2a} \phi(y) dy = 0 \quad (20)$$

これらの条件から未知数 c_1, c_2, δ が定められ、解が確定する。本論文の計算は、級数の第10項までを採用することにして実行した。

3. 流速計測の概要

この論文に使用した計測結果について述べる。

まず、石狩川における計測は、1990年9月4日から6日にかけて長谷川・大串らによって石狩河口橋で行われたものであり、二次元電磁流速計を使用している。計測結果は河床から水面までをひとつのシリーズとしてまとめられている。シリーズ(1)～シリーズ(7)は、水位上昇期であり、1. で述べたように水位が上がるにつれて中膨らみ形に移行している。シリーズ(8)は、ピーク時でかなり乱れた分布を見せており、水位上昇から下降への変化を表しているものと思われる。シリーズ(9)～シリーズ(11)は水位下降期であり、次第に通常の放物線分布を見せるようになる。

次に、豊平川での計測は、1994年9月25日から26日にかけて著者らが雁来大橋で行ったものである。平面式流速計を使用している。この時、水位は微妙に上下に変化しており、石狩川における計測のように中膨らみの形を計測することは出来なかった。

4. 石狩川の流速計測値と理論値との比較

理論式中の n と f を決めるためには、式(15)、(16)中に現れる $I, i, \frac{dh}{dt}$ などの正確な値が必要である。しかし、 i, f など観測されていない項があるので、ここでは逆に流速分布を最も良く表現する n, f を探し、逆算によって $i, \frac{dh}{dt}$ などが妥当な値を示すか否かを検討することにする。

次の図-1～11は、石狩川の流速計測値と最適 n と f を与えた理論値とを比較した図である。上昇期、下降期ともに適切な n, f を採用することにより両者をかなり良く一致させ得ることが分かる。

1) 水位上昇期における計測値と理論値との比較

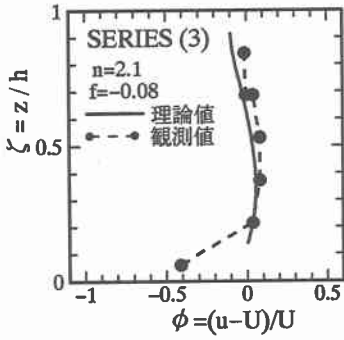


図 - 1

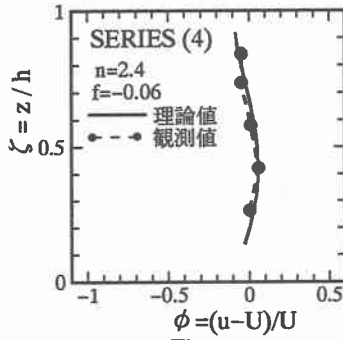


図 - 2

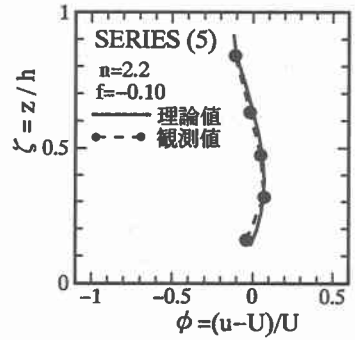


図 - 3

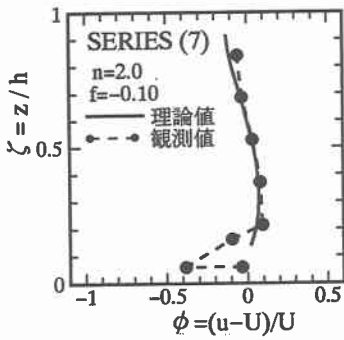


図 - 4

a) 水位下降期における計測値と理論値との比較

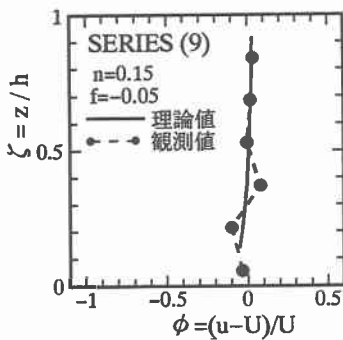


図 - 5

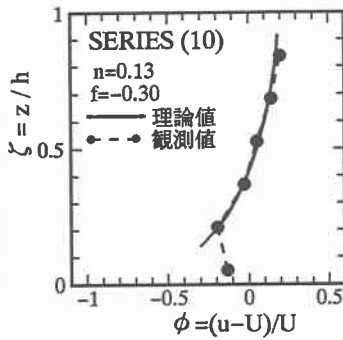


図 - 6

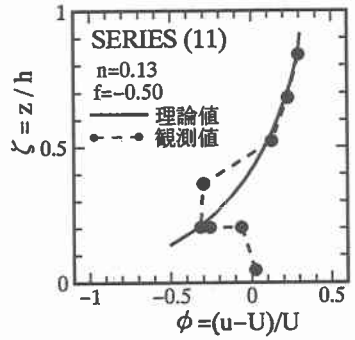


図 - 7

5. 豊平川の流速計測と理論値との比較

豊平川の水位は計測時に非常に不安定に上下しており、その様子が流速分布に微妙に影響しているものと思われる。しかし、流速分布はほぼ放物線形を呈しており、理論式によるあてはめが可能である。

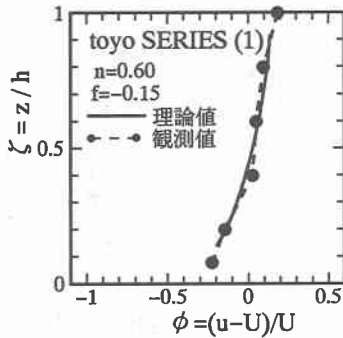


図-8

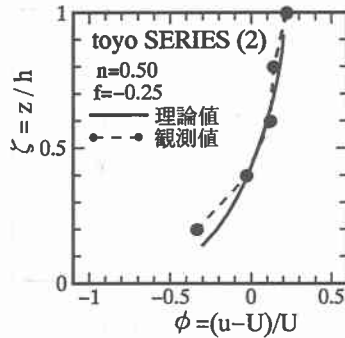


図-9

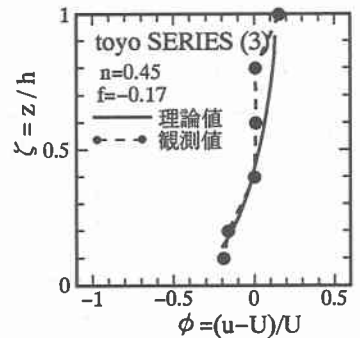


図-10

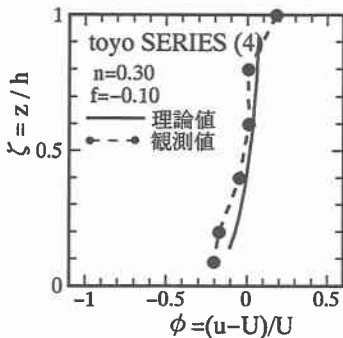


図-11

表-1 石狩川と豊平川のシリーズ毎の i , と $\frac{1}{U} \frac{dh}{dt}$ の値

石狩川			豊平川		
シリーズ	摩擦勾配 $i, (/1)$	$\frac{1}{U} \frac{dh}{dt}$	toyo シリーズ	摩擦勾配 $i, (/1)$	$\frac{1}{U} \frac{dh}{dt}$
3	1724.13	0.151980	1	2969.95	0.020639
4	1107.37	0.228268			
5	1418.83	0.174509	2	2197.06	0.039676
7	2037.58	0.132273			
9	25914.1	0.002789	3	2784.30	0.017985
10	15914.2	-0.00177			
11	12438.3	-0.00650	4	2987.35	0.014034

6. 考察

はじめに、式(15)、(16)で示されるパラメータ n, f の一般的性質について調べることにする。

- ① 等流時には、 $\frac{dh}{dt} = 0, i_s = I = i$ (河床勾配)であることから、

$$n = 0, \quad f = -\frac{\sqrt{i}}{\kappa F r} = -\frac{1}{\kappa \phi} \quad (\phi : \text{流速係数})$$

となる。 $\kappa = 0.4, \phi = 15$ の常識的な値を用いると $f = -0.167$ 程度の値になろう。式(14)からは対数分布が導かれることになる。

- ② 水位上昇時には、 $\frac{dh}{dt} > 0$ から、

$$n > 0, \quad f > -0.167$$

となり、 n, f 共に大きめの値をとるであろう。

③ 水位下降時には、 $\frac{dh}{dt} < 0$ から、

$$n(n+1) < -2 \left(f + \frac{I}{\kappa F r \sqrt{i_s}} \right), \quad f < -0.167$$

の制限が予想される。即ち、 n, f 共に小さな値をとる。

図-1~11 に示した最適の n, f の値は、傾向的に上述の性質を示している。

次に、最適の n, f 値から、計測の困難な $i_s, \frac{dh}{dt} \frac{1}{U}$ の値を逆算して検討を加える。表-1は各測点で

計測された U, f, I を用い、更に $c = \frac{5}{3} U$ として求めた $i_s, \frac{dh}{dt} \frac{1}{U}$ の値を示したものである。これら

によると、摩擦勾配 i_s は常識的な値をとっており、少なくとも非正常効果を無視したときに生じた逆算の i_s が負となるという矛盾は起こっていない。即ち、 i_s に関してのみ限り、非正常項の存在は不可欠であることが分かる。

次に、 $\frac{dh}{dt} \frac{1}{U}$ について見ると、上昇期データについては正、下降期データについては負となっており、定性傾向に矛盾はない。即ち、中膨らみの特異な流速分布は、上昇期の n の値が大きくなる場合にのみ現れる注目すべき現象であることが分かる。

しかし、この項の(特に正の場合の)値は、観測値に比して数オーダー以上高いものになっている。この原因の一つに、 c の値の評価があるように考えられる。一般に、洪水波は河口近くではガッパ性を帯び、また、かなり偏平化する。このため $\frac{d}{dt} = -c \frac{d}{dx}$ の変換における c はかなり大きなものになることが予想される。

$c = U + \sqrt{gh}$ と考えた場合、表-1の逆算した値は1オーダーほど低いものとなるが、それでもまだ大きすぎる。妥当な c に関する見積が必要になると考えられる。

7. まとめ

- 1) 洪水時の流速分布は式(14)のLegendre型の式によって普遍的に表現できる可能性がある。
- 2) Legendre型式に含まれる係数パラメータ n, f は、非正常効果を加味することによって合理的に説明出来、長谷川・大串らによって導かれた式で生じた摩擦勾配が負になるという矛盾は非正常効果を考慮に入れることで解決することができる。
- 3) 石狩川河口橋で計測された中膨らみの特異な流速分布は、水位上昇期の n の大きな時期のみに現れる。長谷川らによって導かれた式で生じた、摩擦勾配が負になるという矛盾は、非正常効果を考慮に入れると解決する事ができる。
- 4) 最適の n, f から逆算した $\frac{dh}{dt} \frac{1}{U}$ がオーダー的に大きな値をとるという新たな問題が生じており、検討を要する。

8. 参考文献

- 1) 長谷川和義・道口敏幸・柿崎恒美・大串弘哉：石狩川における乱流と浮遊砂濃度の同時計測結果について、土木学会北海道支部論文報告集、第47号、1991
- 2) 長谷川和義：石狩川における流速と浮遊砂の同時計測、平成3年度科研費総合研究(A)「様々なスケールにおける流れと流砂運動の同時計測による土砂輸送、河床変動機構の解明」(代表 芦田 和男)、報告書、1992
- 3) 長谷川和義・大串弘哉・竹本成行・渡邊康玄：石狩川小洪水に見られる特異な流速分布の発生因に関する考察、土木学会北海道支部論文報告集、第48号、1992