II－20

貯留型流出モデルを用いた確率応答に関する研究
-貯留係数が不規則関数である場合-

日本国土開発（株）正　員　　工藤　睦信
北海道大学工学部　正　員　　藤田　睦博
北海道大学大学院　学生員　　竹本　晃

1.はじめに

降雨流出系のモデルを構築する場合、流出に関する諸要素を単純化、理想化して取り扱う場合が多く、これらの要素が均一化して取り扱える範囲、即ちスケールが重要な問題となる。しかし、これらの要素は時間的にも、空間的にも変動しており、本来は決定論的な取扱いよりもむしろ確率論的に取り扱うべきであり、流出量も確率論的に取り扱うべきであろう。

降雨流出系において、その確率変動成分は以下の3成分が考えられる。

1) 降雨開始時における流域の湿潤度などの初期条件
2) 流域の地形・地質などの流出系のパラメータ
3) 強制項である降雨量

実際の流出過程においては、これらの3成分すべてが流出量の確率応答に影響を及ぼしているが、すべてを考慮にいれて解析を進めることは困難である。本研究は流出系のパラメータであるK が不規則関数である場合に限定して、流出量の確率的な特性を貯留型流出モデルを用いて調べたものである。

2.基礎理論

$$\frac{dS}{dt}+q=r \quad (1) \qquad S=Kq^P \quad (2)$$

q :流出量　　r :降雨量　　K :貯留係数　　P :貯留指数

式(2)においてK を確率変数と考えると、q もまた確率変数となる。これらを平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$K=\overline{K}+\widetilde{K}\ ,\ E(\widetilde{K})=0 \quad (3) \qquad q=\overline{q}+\widetilde{q}\ ,\ E(\widetilde{q})=0 \quad (4)$$

また、ベキ乗型の確率変数q^P に関して、次の近似式を用いる。

$$(\overline{q}+\widetilde{q})^P=\alpha\,\overline{q}+\beta\,\widetilde{q} \quad (5)$$

Brasら[1]は、上式の両辺の誤差の平均値を0、分散を最小にする係数α,β として次式を提案している。

$$\alpha=\overline{q}^{\,P-1}\left\{1+\frac{1}{2}P(P-1)\frac{E(\widetilde{q}^{\,2})}{\overline{q}^{\,2}}+\frac{1}{6}P(P-1)(P-2)\frac{E(\widetilde{q}^{\,3})}{\overline{q}^{\,3}}+\cdots\right\} \quad (6)$$

$$\beta=\frac{\overline{q}^{\,P+1}}{E(\widetilde{q}^{\,2})}\left\{P\frac{E(\widetilde{q}^{\,2})}{\overline{q}^{\,2}}+\frac{1}{2}P(P-1)\frac{E(\widetilde{q}^{\,3})}{\overline{q}^{\,3}}+\frac{1}{6}P(P-1)(P-2)\frac{E(\widetilde{q}^{\,4})}{\overline{q}^{\,4}}+\cdots\right\} \quad (7)$$

式(2)～(5)を用いて、式(1)を書き直すと次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\{\alpha\overline{K}\,\overline{q}+\beta\overline{K}\,\widetilde{q}+\alpha\,\overline{q}\,\widetilde{K}+\beta\widetilde{K}\,\widetilde{q}\}+\overline{q}+\widetilde{q}=r \quad (8)$$

式(8)の期待値をとると

$$\frac{d}{dt}\{\alpha\overline{K}\,\overline{q}+\beta E(\widetilde{K}\,\widetilde{q})\}+\overline{q}=r \quad (9)$$

Stochastic Response in Storage Function Model
-Storage coefficients are Random Function-
by Mutsunobu KUDO, Mutsuhiro FUJITA, Akira TAKEMOTO.

さらに、式(8)から式(9)を差し引くと次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\{\beta\overline{K}\widetilde{q}+\alpha\overline{q}\widetilde{K}+\beta\widetilde{K}\widetilde{q}-\beta E(\widetilde{K}\widetilde{q})\}+\widetilde{q}=0 \tag{10}$$

式(9)が平均流出量$\overline{q}(t)$を求める基本式になっているが、これを求めるには相関係数$E(\widetilde{K}\widetilde{q})$の値が必要になる。$E(\widetilde{K}\widetilde{q})$は、式(10)の両辺に$\widetilde{K}$を乗じて期待値をとると得られるが、この式を解くためにはさらに高次の相関係数$E(\widetilde{K}^2\widetilde{q})$が必要になる。いま、$E(\widetilde{K}^4\widetilde{q})$以上の相関係数を無視して、これらの式をまとめると次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\{\alpha\overline{K}\overline{q}+\beta y_1\}+\overline{q}=r \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\{\beta\overline{K}y_1+\alpha\sigma_K{}^2\overline{q}+\beta y_2\}+y_1=0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\{\beta\overline{K}y_2+\alpha\mu_{K3}\overline{q}+\beta y_3-\beta\sigma_K{}^2y_1\}+y_2=0 \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\{\beta\overline{K}y_3+\alpha\mu_{K4}\overline{q}+\beta y_4-\beta\mu_{K3}y_1\}+y_3=0 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\{\beta\overline{K}y_4-\beta\mu_{K4}y_1\}+y_4=0 \tag{15}$$

$$y_i=E(\widetilde{K}^i\widetilde{q}),\quad i=1,2,3,4$$

ここに、$\sigma_K{}^2, \mu_{K3}, \mu_{K4}$は、貯留係数の2～4次モーメントを示している。平均流出量$\overline{q}$は、式(11)～(15)の連立微分方程式の解として与えられる。式(10)を変形すると次式を得る。

$$\frac{d\widetilde{q}}{dt}+f(t)\widetilde{q}=\frac{1}{\overline{K}\beta}\{y_5(t)-\widetilde{K}g(t)-\widetilde{y}_5(t)\} \tag{16}$$

$$f(t)=\frac{1}{\overline{K}\beta}\left(\overline{K}\frac{d\beta}{dt}+1\right) \tag{17}$$

$$g(t)=\frac{d(\alpha\overline{q})}{dt} \tag{18}$$

$$y_5(t)=\frac{d\beta E(\widetilde{K}\widetilde{q})}{dt} \tag{19}$$

$$\widetilde{y}_5(t)=\frac{d(\beta\widetilde{K}\widetilde{q})}{dt} \tag{20}$$

式(16)を解いて次式を得る。

$$\widetilde{q}=e^{-\int f(t)dt}\int\frac{1}{\overline{K}\beta}\{y_5(\tau_1)-\widetilde{K}g(\tau_1)-\widetilde{y}_5(\tau_1)\}e^{\int f(\tau_2)d\tau_2}d\tau_1 \tag{21}$$

式(21)の両辺をそれぞれ2,3,4乗して、期待値をとると$q(t)$の2～4次モーメント$\sigma_q{}^2, \mu_{q3}, \mu_{q4}$が得られる。

$$\frac{d\sigma_q{}^2}{dt}+2f(t)\sigma_q{}^2=\frac{2}{\overline{K}^2\beta}\{\sigma_K{}^2g(t)U_1+y_6(t)U_1+g(t)U_2-y_5(t)U_3\}+U_{10} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_{q3}}{dt}+3f(t)\mu_{q3}=\frac{3}{\overline{K}^3\beta}\{&-\mu_{K3}g(t)U_1{}^2+\sigma_K{}^2(y_5(t)U_1{}^2+2g(t)U_1U_3)+2g(t)(U_2U_3-U_1U_8)\\&+2y_5(t)(U_1U_2-U_3{}^2)+2y_6(t)U_1U_3-y_7(t)U_1{}^2\}+U_{11}+U_{12}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_{q4}}{dt}+4f(t)\mu_{q4}=\frac{4}{\overline{K}^4\beta}\{&\mu_{K4}g(t)U_1{}^3+3\sigma_K{}^2(y_6(t)U_1{}^2U_3+g(t)U_1U_3{}^2)\\&+3g(t)(2U_1U_3U_8-U_1{}^2U_3)+y_5(t)(3U_1{}^2U_8-U_1{}^3-3U_3{}^3)-3y_7(t)U_1{}^2U_3+y_8(t)U_1{}^3\}+U_{13}+U_{14}\end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{dU_1}{dt}+f(t)U_1=\frac{g(t)}{\beta} \tag{25}$$

$$\frac{dU_2}{dt}+f(t)U_2=\frac{y_6(t)}{\beta} \tag{26}$$

$$\frac{dU_3}{dt}+f(t)U_3=\frac{y_5(t)}{\beta} \tag{27}$$

$$\frac{dU_4}{dt}+f(t)U_4=\frac{d(\beta U_1)}{\beta dt} \tag{28}$$

$$\frac{dU_5}{dt}+f(t)U_5=\frac{y_8(t)}{\beta} \tag{29}$$

$$\frac{dU_6}{dt}+f(t)U_6=\frac{d(\beta U_5)}{\beta dt} \tag{30}$$

$$\frac{dU_7}{dt}+f(t)U_7=\frac{d(\beta U_3)}{\beta dt} \qquad (31) \qquad\qquad \frac{dU_8}{dt}+f(t)U_8=\frac{y_7(t)}{\beta} \qquad (32)$$

$$\frac{dU_9}{dt}+f(t)U_9=\frac{d(\beta U_8)}{\beta dt} \qquad (33) \qquad\qquad y_{i+4}(t)=\frac{d\beta E(\widetilde{K}^i\widetilde{q})}{dt}\ ,\quad i=1,2,3,4$$

$$U_{10}=\frac{2}{\overline{K}^4\beta}\left\{\frac{d(\beta U_1)}{dt}(\mu_{K4}U_4+U_6-\mu_{K3}U_7)+\frac{d(\beta U_3)}{dt}(\sigma_K{}^2U_7-\mu_{K3}U_4-U_9)+U_4\frac{d(\beta U_5)}{dt}-U_7\frac{d(\beta U_8)}{dt}\right\} \qquad (34)$$

$$U_{11}=\frac{3}{\overline{K}^5\beta}\left\{\frac{d(\beta U_1)}{dt}(2\mu_{K4}U_3U_4-\mu_{K3}U_3U_7+2U_3U_6)+\frac{d(\beta U_3)}{dt}(-\mu_{K3}U_3U_4+2\sigma_K{}^2U_3U_7-2U_3U_9)+2\frac{d(\beta U_5)}{dt}U_3U_4-2\frac{d(\beta U_8)}{dt}U_3U_7+y_5(t)(\mu_{K4}U_4{}^2-\mu_{K3}U_4U_7+\sigma_K{}^2U_7{}^2+2U_4U_6-2U_7U_9)\right\} \qquad (35)$$

$$U_{12}=\frac{3}{\overline{K}^5\beta}\left\{\frac{d(\beta U_1)}{dt}\mu_{K4}U_1U_7+\frac{d(\beta U_3)}{dt}(\mu_{K4}U_1U_4-2\mu_{K3}U_1U_7+2U_1U_6)+2\frac{d(\beta U_5)}{dt}U_1U_7+g(t)(\mu_{K4}U_4U_7-\mu_{K3}U_7{}^2+2U_6U_7)\right\} \qquad (36)$$

$$U_{13}=\frac{6}{\overline{K}^6\beta}\left\{\frac{d(\beta U_1)}{dt}(2\mu_{K4}U_3{}^2U_4-\mu_{K3}U_3{}^2U_7+2U_3{}^2U_6)+\frac{d(\beta U_3)}{dt}(-\mu_{K3}U_3{}^2U_4+2\sigma_K{}^2U_3{}^2U_7-2U_3{}^2U_9)+2\frac{d(\beta U_5)}{dt}U_5{}^2U_4-2\frac{d(\beta U_8)}{dt}U_3{}^2U_7+12y_5(t)(\mu_{K4}U_3U_4{}^2-\mu_{K3}U_3U_4U_7+\sigma_K{}^2U_3U_7{}^2-2U_3U_7U_9+2U_3U_4U_6)\right\} \qquad (37)$$

$$U_{14}=-\frac{12\mu_{K4}}{\overline{K}^6\beta}\left(2\frac{d(\beta U_3)}{dt}U_1U_3U_7+g(t)U_2U_7{}^2+y_5(t)U_1U_7{}^2\right) \qquad (38)$$

式(22),(23),(24)の誘導において$E\{\widetilde{K}^i\widetilde{y}_5(\tau_1)\widetilde{y}_5(\tau_2)\}$, $i\geqq 2$ を無視している。また、式(22),(23),(24)の$\sigma_q{}^2$,μ_{q3} ,μ_{q4}を求めるには、式(11)～(15),(22)～(38)を連立させて解かねばならない。

3.シミュレーション法による検討

次に、誘導した式の解として得られる$\overline{q}$, $\sigma_q{}^2$, μ_{q3}, μ_{q4} をチェックしておく必要がある。貯留係数K に図-1に示すような矩形分布を与えて、矩形乱数を発生させ式(1),(2)を直接解いて各時刻毎に流出量の平均値、分散、3次モーメント、4次モーメントを求めた。 降雨量については、次式に示すような一定降雨を与えた。

$$r(t)=\begin{cases}\overline{r} & 0\leqq t\leqq t_r\\ 0 & t>t_r\end{cases} \qquad (39)$$

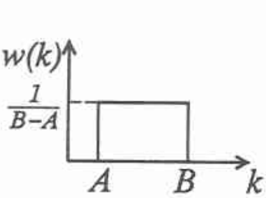

図-1 貯留係数の確率分布

本論文で提案している平均流量とその分散、3次モーメント、4次モーメントを求める理論式は一種の近似式である。これは、式(5)あるいは$\overline{q}$, $\sigma_q{}^2$, μ_{q3}, μ_{q4} を求める際に無視した高次のモーメントを考えると明かである。 シミュレーションでは、図-1 および式(39)で次の値を設定した。

$$A=3\ ,\ B=7\ ,\ \overline{r}=5(mm/hr)\ ,\ t_r=15(hr) \qquad (40)$$

図-2,3,4,5は式(2)でP=0.6,0.8,1.0として、シュミレーションの結果(破線)と理論式の結果(実線)を比較したものである。両者はよく一致している。なお、式(6),(7)のα, β に関しては、第1項のみを採用している。

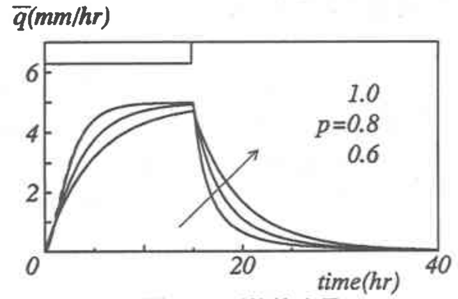

図-2　平均流出量

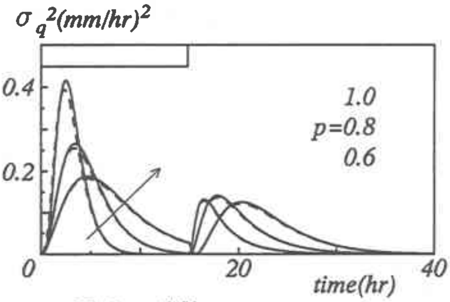

図-3　分散

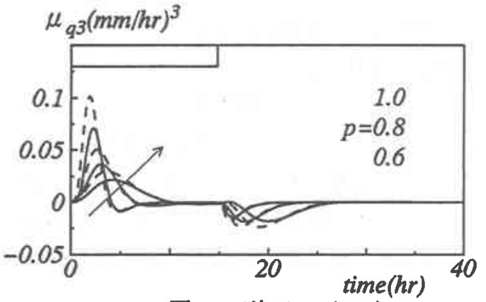

図-4　3次モーメント

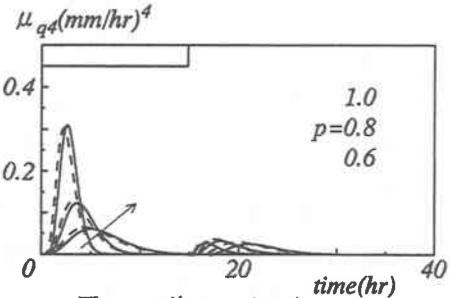

図-5　4次モーメント

4.まとめ

近年、気象レーダから雨量情報を得ることができるようになった。降雨の空間分布が分かるようになり、これに対応する流出モデルが必要となる。流域をn 個のサブ流域に分割した場合、流域末端における流出量は次式で記述できる。

$$Q_n(t)=\sum_{i=1}^{n}q_i(t-t_{Li})=\sum_{i=1}^{n}\left\{q_i(t)-t_{Li}\frac{dq_i}{dt}\right\} \tag{41}$$

$q_i(t)$:i 番目の流域からの流出量　　　　　t_{Li}:i 番目の流域からの遅れ時間

流域の分割数n は降雨量の空間分布特性と流域特性に基づいて決定されるべきものであるが、最適の分割数n をどのように定めるかが問題となる。実際に流域を分割する際、河道網の構造に基づいて分割せざるを得ない。従って、結果として得られるサブ流域の面積や斜面長などの流出に関する要素は大小様々であり、これらを確率変数として扱うことができる。従って、サブ流域からの流出量を貯留型流出モデルを用いた場合、これらの効果は貯留係数を不規則関数とすることで表現でき、本論文の結果を利用することによって式(41)のq_i,dq_i/dt の確率的な特性を知ることができる。

参考文献

1)Bras,R.L. and Geogakakos,K.P.;Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecast-ing-A Statistical Linearization Approach-,Third Int. Symp. on Stochastic Hydraulics,95-105, 1980.

2)工藤睦信,藤田睦博;貯留型流出モデルの確率応答-貯留係数が不規則関数の場合-,水文・水資源学会研究発表会要旨集,60-61,1993.

3)藤田睦博,中尾隆志,篠原伸和;貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について,水工学論文集,第37巻,99～104,1993.

4)工藤睦信,藤田睦博,清水康行,竹本晃;分布型流出モデルに関する研究-確率微分方程式の導入-,水理講演会,1995.(投稿中)