土木学会北海道支部　論文報告集　第51号(B)

II－19

貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について

-降雨量が互いに従属する不規則関数の場合-

日本国土開発(株)　正　員　工藤　睦信
北海道大学工学部　正　員　藤田　睦博
北海道大学工学部　学生員　田中　岳

1．はじめに

著者らは、これまでに降雨量が互いに時間的に独立な不規則関数とした場合について、貯留型流出モデルの確率応答について検討してきた[1,2]。一方、実測降雨を完全に独立な不規則関数とは言いがたく、本論文は、降雨量の相関を考慮した貯留型流出モデルの確率応答について論じたものである。

2．基礎理論

最も簡単な貯留型流出モデルは、次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dt}+q=r \qquad (1) \qquad\qquad S=Kq^{P} \qquad (2)$$

式(1)において、降雨量rが不規則関数ならば、流出量qならびに貯留高Sもまた不規則関数となる。これらの量を平均値とそれからの偏差で表現する。

$$r=\overline{r}+\widetilde{r}\ ,\ E\{\widetilde{r}\}=0 \quad (3) \qquad q=\overline{q}+\widetilde{q}\ ,\ E\{\widetilde{q}\}=0 \quad (4) \qquad S=\overline{S}+\widetilde{S}\ ,\ E\{\widetilde{S}\}=0 \quad (5)$$

式(1),(2)からqを消去して

$$\frac{dS}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}S^{m}=r\ ,\ m=\frac{1}{P} \qquad (6)$$

式(6)のベキ乗型の不規則関数S^{m}に次式を用い、係数α，βは、Brasの提案したものを採用し以下の(8),(9)に示す。

$$S^{m}=\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S} \qquad (7)$$

$$\alpha=\overline{S}^{m-1}\left\{1+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\widetilde{S}^{2})}{\overline{S}^{2}}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\widetilde{S}^{3})}{\overline{S}^{3}}+\cdots\right\} \qquad (8)$$

$$\beta=\frac{\overline{S}^{m+1}}{E(\widetilde{S}^{2})}\left\{m\frac{E(\widetilde{S}^{2})}{\overline{S}^{2}}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\widetilde{S}^{3})}{\overline{S}^{3}}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\widetilde{S}^{4})}{\overline{S}^{4}}+\cdots\right\} \qquad (9)$$

式(3)～(5),(7)を(6)に代入して次式を得る。

$$\frac{d(\overline{S}+\widetilde{S})}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}(\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S})=\overline{r}+\widetilde{r} \qquad (10)$$

式(10)の期待値をとれば

$$\frac{d\overline{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\alpha\overline{S}=\overline{r} \qquad (11)$$

式(10)から(11)を差し引くと

Higher Order Moments of Discharge in a Storage Function Modele for Flood Runoff
-The Impact of Matually Dependent Rainfall Input-
by Mutsunobu KUDO, Mutsuhiro FUJITA, Gaku TANAKA

$$\frac{d\widetilde{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta\widetilde{S}=\widetilde{r} \qquad (12)$$

式(12)からβ ～S^{m} の関係は、(9)に示されるように独立ではないが、その関係は期待値の演算子E を介しているので、その従属性は弱いものと考えられるので、ここでは独立なものと仮定して(12)を解く。

$$\widetilde{S}=e^{-F(t)}\int_{0}^{t}\widetilde{r}(\tau)e^{F(\tau)}d\tau \qquad (13)$$

式(13)を用いることで、以下に示す貯留量に関する高次モーメントが得られる。

$$\sigma_{S}{}^{2}=E(\widetilde{S}^{2})=e^{-2F(t)}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\}e^{F(\tau_{1})+F(\tau_{2})}d\tau_{1}d\tau_{2} \qquad (14)$$

$$\mu_{S3}=E(\widetilde{S}^{3})=e^{-3F(t)}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\widetilde{r}(\tau_{3})\}e^{F(\tau_{1})+F(\tau_{2})+F(\tau_{3})}$$
$$\times d\tau_{1}d\tau_{2}d\tau_{3} \qquad (15)$$

$$\mu_{S4}=E(\widetilde{S}^{4})=e^{-4F(t)}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\widetilde{r}(\tau_{3})\widetilde{r}(\tau_{4})\}$$
$$\times e^{F(\tau_{1})+F(\tau_{2})+(\tau_{3})+F(\tau_{4})}d\tau_{1}d\tau_{2}d\tau_{3}d\tau_{4} \qquad (16)$$

ただし　$F(t)=e^{-\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta dt}$

ここで用いられている小文字のr は、連続量であるので実測降雨量を取り入れる場合には、これを離散的な降雨量（ここでは大文字のR ）に変換する必要がある。そこで、以下にその変換式を示す。

$$R(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}r(\tau)d\tau \qquad (17)$$

さらに式(17)より、次式も誘導される。

$$\widetilde{R}(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}\widetilde{r}(\tau)d\tau \qquad (18)$$

式(18)により、

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\}=\frac{1}{\Delta t^{2}}\iint E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\}d\tau_{1}d\tau_{2} \qquad (19)$$

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\widetilde{R}(t_{3})\}=\frac{1}{\Delta t^{3}}\iiint E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\widetilde{r}(\tau_{3})\}d\tau_{1}d\tau_{2}d\tau_{3} \qquad (20)$$

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\widetilde{R}(t_{3})\widetilde{R}(t_{4})\}=\frac{1}{\Delta t^{4}}\iiiint E\{\widetilde{r}(\tau_{1})\widetilde{r}(\tau_{2})\widetilde{r}(\tau_{3})\widetilde{r}(\tau_{4})\}$$
$$\times d\tau_{1}d\tau_{2}d\tau_{3}d\tau_{4} \qquad (21)$$

　ここで図-1により、実測降雨量による自己共分散関数は、指数関数に近似できることがわかる。

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\}=\sigma_{R}{}^{2}\rho^{t_{1}-t_{2}} \qquad (t_{1}\geqq t_{2}) \qquad (22)$$

これは、離散的な降雨量$R(=\overline{R}+\widetilde{R})$ において$\widetilde{R}$ がAR(1)課程$(\widetilde{R}_{t}=\rho\widetilde{R}_{t-1}+N_{t})$ を満足することを示している。ただし、N_{t} は$\widetilde{R}_{t}$ とは独立な不規則関数である。従って、以下の式(23),(24)が誘導される。

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\widetilde{R}(t_{3})\}=\mu_{R3}\rho^{t_{1}+t_{2}-2t_{3}} \qquad (t_{1}\geqq t_{2}\geqq t_{3}) \qquad (23)$$

$$E\{\widetilde{R}(t_{1})\widetilde{R}(t_{2})\widetilde{R}(t_{3})\widetilde{R}(t_{4})\}=(\mu_{R4}-3\sigma_{R}{}^{4})\rho^{t_{1}+t_{2}+t_{3}-3t_{4}}$$

$$+\sigma_R{}^4\{2\rho^{t_1+t_2-t_3-t_4}+\rho^{t_1-t_2+t_3-t_4}\} \qquad (t_1\geqq t_2\geqq t_3\geqq t_4) \tag{24}$$

一般化されたr に関する高次モーメントは、式(22)～(24)および(19)～(21)より求め以下に示す。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\sigma_{r1}{}^2+\delta(\tau_1-\tau_2)\sigma_{r2}{}^2 \tag{25}$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}=e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}\mu_{r31}+(\tau_2-\tau_3)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\mu_{r32}$$
$$+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\mu_{r33} \tag{26}$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}=e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2+\tau_3-3\tau_4)}\mu_{r41}+e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)}\mu_{r42}$$
$$+e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)}\mu_{r43}+\left\{\delta(\tau_1-\tau_2)e^{-\gamma(\tau_3-\tau_4)}+\delta(\tau_2-\tau_3)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}\right.$$
$$\left.+\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\right\}\mu_{r44}+\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2-2\tau_3)}\mu_{r45}$$
$$+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r46}+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_4)}\mu_{r47}$$
$$+\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)e^{-\gamma(\tau_1-\tau_2)}\mu_{r48}+\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-\tau_3)\delta(\tau_3-\tau_4)\mu_{r49} \tag{27}$$

ただし　$\tau_1\geqq\tau_2\geqq\tau_3\geqq\tau_4$

$$\gamma=-\frac{Log(\rho)}{\Delta t}$$

また、式(25)～(27)中の$\sigma_{r\cdot}{}^2$, $\mu_{r\cdot\cdot}$ は、(19)～(21)を満足する定数である。

式(14)～(16)に上の結果を代入することにより以下の貯留量に関する微分方程式が得られる。

1) 2次モーメント

$$\frac{d\sigma_S{}^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S{}^2=2\sigma_{r1}{}^2U_1(t)+C\sigma_{r2}{}^2 \tag{28}$$

$$\frac{dU_1}{dt}+\left\{\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_1=1 \tag{29}$$

2) 3次モーメント

$$\frac{d\mu_{S3}}{dt}+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S3}=6\mu_{r31}U_2(t)+3C\mu_{r32}U_4(t)+C^2\mu_{r33} \tag{30}$$

$$\frac{dU_2}{dt}+\left\{\gamma+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_2=U_3(t) \tag{31}$$

$$\frac{dU_3}{dt}+\left\{2\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_3=1 \tag{32}$$

$$\frac{dU_4}{dt}+\left\{\gamma+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_4=1 \tag{33}$$

3) 4次モーメント

$$\frac{d\mu_{S4}}{dt}+4\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S4}=24\{\mu_{r41}U_5(t)+\mu_{r42}U_8(t)+\mu_{r43}U_{10}(t)\}$$
$$+12C\mu_{r44}\{U_{11}(t)+U_{12}(t)+U_{13}(t)\}+12C\mu_{r45}U_{15}(t)$$
$$+6C^2\mu_{r46}U_{14}(t)+4C^2\{\mu_{r47}U_1(t)+\mu_{r48}U_{17}(t)\}+C^3\mu_{r49} \tag{34}$$

$$\frac{dU_5}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_5=U_6(t) \tag{35}$$

$$\frac{dU_6}{dt}+2\left\{\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_6=U_7(t) \tag{36}$$

$$\frac{dU_7}{dt}+\left\{3\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_7=1 \qquad (37)$$

$$\frac{dU_8}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_8=U_9(t) \qquad (38)$$

$$\frac{dU_9}{dt}+2\left\{\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_9=U_1 \qquad (39)$$

$$\frac{dU_{10}}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{10}=U_{11}(t) \qquad (40)$$

$$\frac{dU_{11}}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta U_{11}=U_1 \qquad (41)$$

$$\frac{dU_{12}}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{12}=U_1 \qquad (42)$$

$$\frac{dU_{13}}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{13}=U_{14}(t) \qquad (43)$$

$$\frac{dU_{14}}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta U_{14}=1 \qquad (44)$$

$$\frac{dU_{15}}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{15}=U_{16}(t) \qquad (45)$$

$$\frac{dU_{16}}{dt}+2\left\{\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{16}=1 \qquad (46)$$

$$\frac{dU_{17}}{dt}+\left\{\gamma+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U_{17}=1 \qquad (47)$$

ただしC は、時間の次元を持つ定数である。
以上の連立微分方程式を解くことにより、貯留量の高次モーメントが得られる。
また式(2),(4),(7)により、以下の流出量の高次モーメントと貯留量のそれとの関係式が導出される。

$$\overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S} \qquad (48)$$

$$\widetilde{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\widetilde{S} \qquad (49)$$

式(49)の両辺を２～４乗して、

$$\sigma_q{}^2=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2\sigma_S{}^2 \qquad (50)$$

$$\mu_{q3}=\left(\frac{1}{K}\right)^{3m}\beta^3\mu_{S3} \qquad (51)$$

$$\mu_{q4}=\left(\frac{1}{K}\right)^{4m}\beta^4\mu_{S4} \qquad (52)$$

これに、式(11)を付け加えることにより、降雨量を互いに従属する不規則関数とした貯留関数法を用いた流出量の高次モーメントが得られる。

３．シミュレーション法による検討

理論式の誘導に用いたように、$\widetilde{R}(t)$ がAR(1)課程を満足するように不規則関数$R(t)$を発生させる。そこで、互いに独立な不規則関数$N(t)$の分散を$\sigma_N{}^2$とすれば、式(22)は次式のように示される。

$$E\{\widetilde{R}(t_1)\widetilde{R}(t_2)\}=\frac{\sigma_N{}^2}{1-\rho^2}\rho^{\,t_1-t_2} \qquad (53)$$

従って、シミュレーション法では$\rho,\sigma_N{}^2$を定め$R(t)$を発生させ、これを用いて$q(t)$を得る。この計算課程を繰り返すことで、時間ごとの流出量に関する高次モーメントが得られる。

図-2は、$K=5, \Delta t=0.5(hr), \overline{R}=5(mm/hr), \sigma_N{}^2=1(mm/hr)^2, N(t)$ が指数乱数のシミュレーション(実線)と理論解(破線)とを比較したものである。
また、式(8),(9)で与えられる係数α,βは、共に第1項のみを採用しているが、非常に良く適合している。なお、$m,\sigma_N{}^2$をそれぞれ変化させて比較を行ったところ十分な適合度を示したが、その結果は紙面の都合上省略する。

４．まとめ

貯留型流出モデルにおいて、降雨量が互いに従属する不規則関数とした場合の流出量に関する高次モーメントを求める理論式を導出し、その妥当正および独立な場合との比較検討をしてきた。本理論は、降雨量が独立(ρ =0)をも含むものであり、従来の理論をより発展させたものである。図-2におけるρ =0.0は理論解

の計算結果が独立な場合と一致したことを示しており、本手法による理論解が独立な場合を包括することが確認された。

図-3は、$\sigma_R^2=1$, $m=2.0$とし、従属性の度合いを示すρ の変化による流出量の確率分布型の時間的変化(0.5, 1.0, 2.5, 4.0, 15.0;単位はhr)を図示したものである。(ただし降雨継続時間等の諸条件は、前章で用いたものと同じであり、$\beta_1=(\mu_{q3}/\sigma_q^3)^2$, $\beta_2=\mu_{q4}/\sigma_q^4$ である。)上昇部において、従属性が弱まるにつれてガンマ分布を示す直線へと漸近し、その後は対数正規分布上にあることがわかる。また、従属性が強まるにつれ正規分布へと近づくことがわかる。さらに、ρ を固定しm を1まで変化させることで、線形性が強まるにつれて分布型がどのように変化するかを調べた結果、同様な軌跡を描きながら次第に正規分布へと近づくことが確認された（図は紙面の都合上省略する）。また、信頼性問題を扱う上で最も重要なピーク時の分布型は、本研究の条件下では対数正規分布であることが推定された。そこでσ_q^2とρ,mとの関係を図-4, 5に示す。この場合、非線形性が強くかつ従属性が強いほどσ_q^2は増加し、それらを無視することはできないと考えられる。

参考文献

1)藤田睦博，中尾隆志，篠原伸和：貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について，水工学論文集，pp99～104，1993

2)工藤睦信，藤田睦博，篠原伸和，長谷川和義：貯留型流出モデルにおける確率応答-降雨量が互いに従属する不規則関数の場合-，土木学会北海道支部　論文報告集，pp304～307, 1994

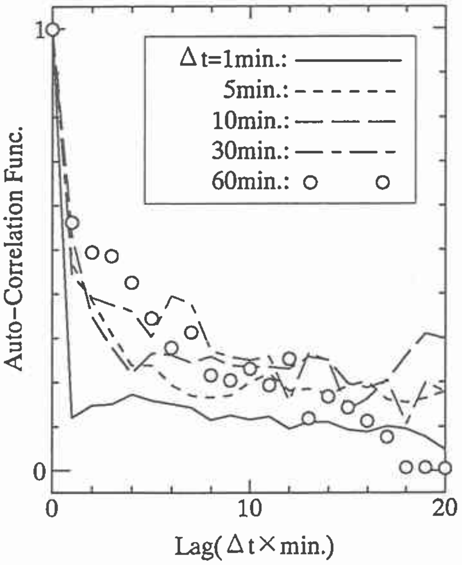


図-1　定山渓ダム流域の実測降雨(1992)

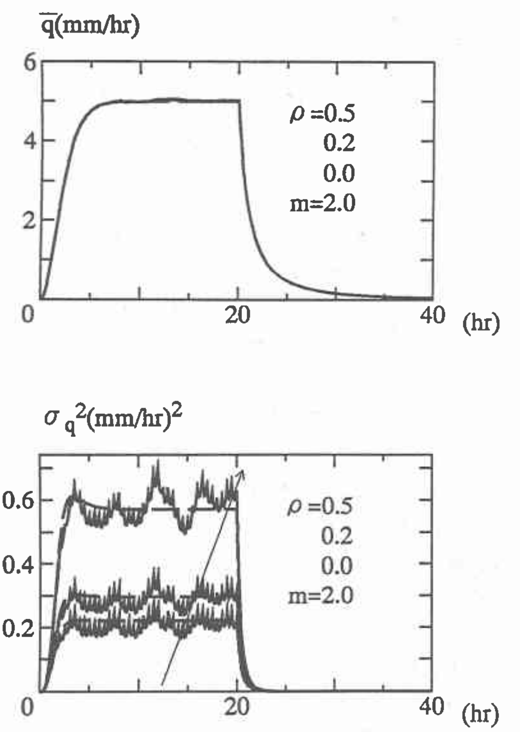
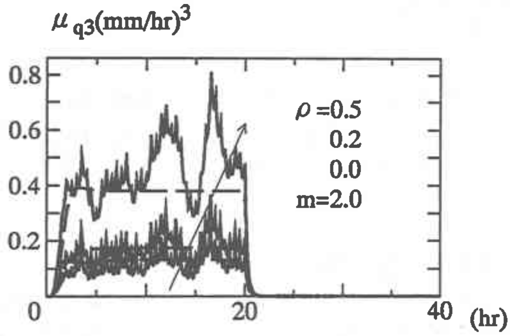


図-2の1



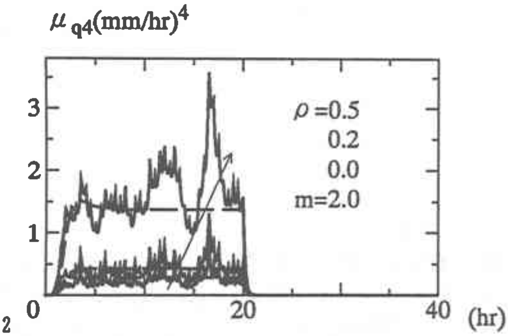
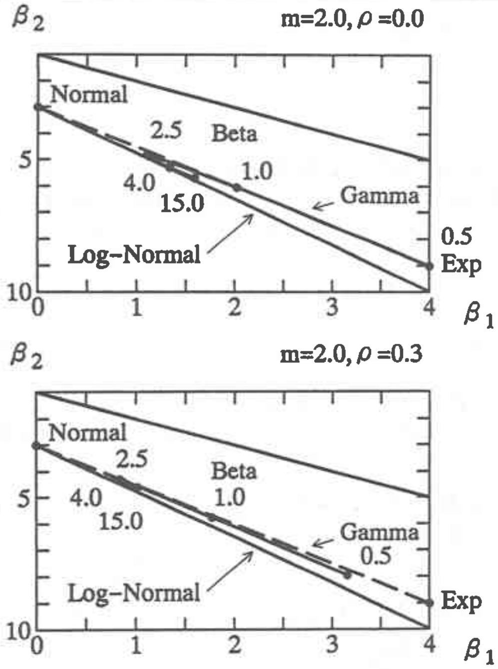


図-2の2



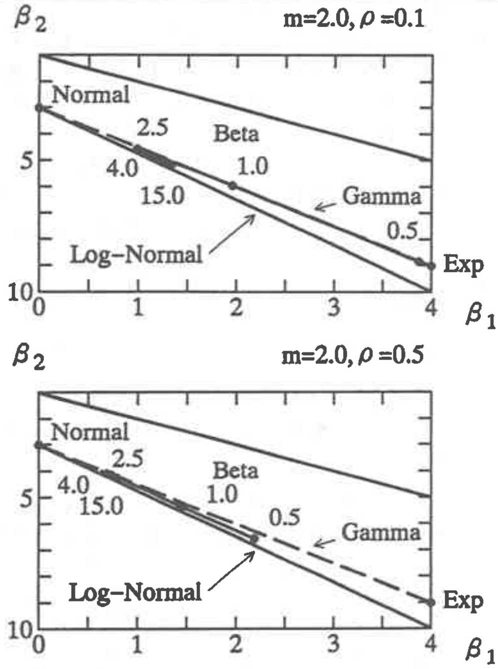


図-3

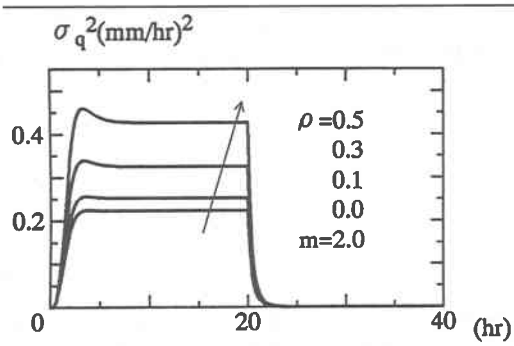


図-4　ρ を変化させた場合

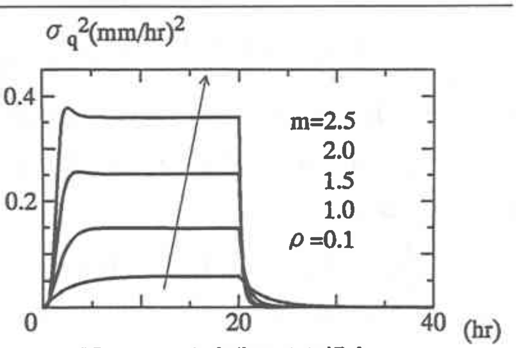


図-5　m を変化させた場合