# II－3　　等球径土粒子の空隙分布の確率論的解析

北見工業大学　正員　中尾隆志
北海道大学　　正員　藤田睦博

## 1．まえがき

著者らは体積含水率とサクションの関係を理論的に求めることを最終目的に土粒子を球形と仮定し、2個の粒子間における水と空気の表面張力によるリング水の保水効果について微視的な立場から解析を行ってきた。これまでの研究成果により、リング水の保水効果は土粒子の粒径比および土粒子構造(fabric)に強く影響を受ける事が判明した[1),2)]。従って、本モデルを実際の土壌に対して適用するには隣接する粒子間の接合状態すなわち土粒子の空間分布を明らかにしなければならない。一般に、土壌の空間分布を示す指標は間隙比あるいは間隙率の形で表現される。このため、ある粒子の接合状況、すなわち土粒子1個あたりの他の土粒子の接合数(以下、配位数と称する)と間隙率あるいは間隙比の関係を求めなければならない。

本報告では、土粒子を等球径粒子と仮定し、土粒子の配位数と間隙率の関係を求めている。また、実際の粒子の充填はランダム的であるため間隙率はある分布をもつ。このため、土壌の平均間隙率から間隙率分布を推定する式を導き出したので報告する。

## 2．等球径規則充填構造の空隙特性

一般に、実際の土粒子の形は球ではなく、その大きさもさまざまである。従って、厳密に土壌特性を数学モデルとして表現するには個々の土粒子形状や粒径分布を説明変数として取り扱わなければならない[3)]がその取扱いは複雑となる。しかし、構成される土粒子が等球径からなると仮定するならば、その取り扱いは容易となる。さらに粒子が規則的に配列された集合体と考えるならば、その集合体の充填特性はより簡単に表せることになる。

表－1　等球径規則集合体の物理特性

| 充填方法 | 配位数 | 粒子数 | 基準容積 | 密　度 | 間隙比 | 間隙率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 単純立方体 | 6 | 1 | $8R^3$ | $\pi/6$ | 0.9098 | 0.4764 |
| 立方四面体 | 8 | 1 | $4\sqrt{3}R^3$ | $\pi/3\sqrt{3}$ | 0.6539 | 0.3954 |
| 立方斜方体 | 10 | 1 | $6R^3$ | $2\pi/9$ | 0.4324 | 0.3019 |
| 角柱体 | 12 | 2 | $8\sqrt{2}R^3$ | $\pi/3\sqrt{2}$ | 0.3504 | 0.2595 |
| 面心四面体 | 12 | 2 | $8\sqrt{2}R^3$ | $\pi/3\sqrt{2}$ | 0.3504 | 0.2595 |
| Kezdi充填 | 4 | 18 | $288R^3$ | $\pi/12$ | 2.8197 | 0.7382 |

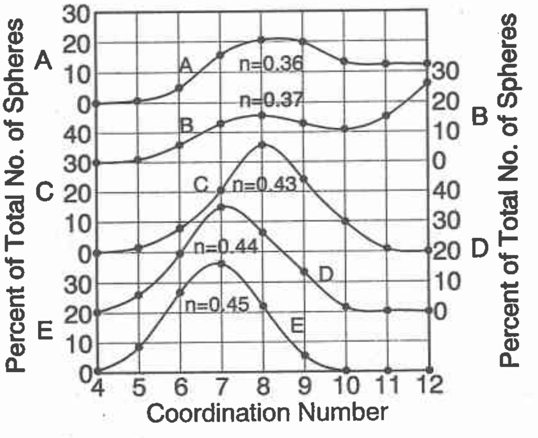
表－1は粒子の半径$R$をパラメータとして等球径規則集合体の物理特性を示している[4),5)]。Kezdiの示した充填方法は本来、基準容積、密度、間隙比、間隙率は球と球のすき間の関数として表されているが、ここでは比較のため、球と球とのすき間は0であるとして計算を行い、その結果を掲載した。表から明らかなように間隙率の小さい密なものほど配位数が増加しており、その値は4から12であり、配位数(N)と間隙率(n)が密接な関係にあることがわかる。これらの関係を最小自乗法で得られた関係式で示すと式(1)が得られる。

$$N=2.868\,n^{-1.058} \tag{1}$$

Analysis of Void Distribution among Equable Particles
by Takashi NAKAO and Mutsuhiro FUJITA

### 3．等球径ランダム充填の空隙特性

Smithら[6]はランダムに充填された等球径からなる粒子の間隙率と配位数の関係を調べるため、間隙率をいろいろ変化させ、ランダムに充填した鉛の散弾を酢酸液に浸した後にできる酢酸塩の斑点から等球径ランダム充填の配位数と間隙率の関係を得ている。図－１に間隙率ごとの配位数のヒストグラムを示す。図から明らかなように間隙率が増加すると、すなわち充填のしかたが緩くなると、規則充填の場合と同様に配位数の平均値が小さくなっている。また、間隙率が0.43から0.45の比較的充填が緩い場合、そのヒストグラムは著しく正規分布に似た形となる。

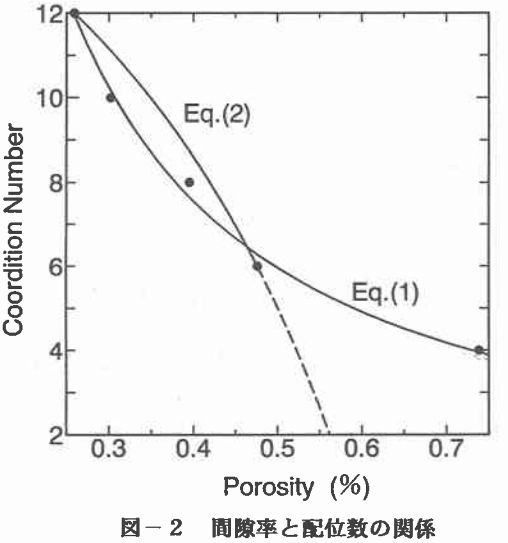



図－１　等球径ランダム充填のヒストグラム

Smithらはランダム充填が規則集合体の単純立方体と面心四面体の２つの集合体のみの混合体であるとの仮定から、ランダム充填の平均間隙率 $\overline{n}$ はこの２つの集合体の混合割合のみで決定されるとして、平均間隙率を用いて平均配位数 $\overline{N}$ を求める式(２)を提案している。

$$\overline{N}=26.4858-\frac{10.7262}{1-\overline{n}} \qquad (2)$$

図－２は粒子がすべて規則充填であるとしたとき、式(１)，(２)により計算される間隙率と配位数の関係を示している。式(２)はN＝６，12の単純立方体と面心四面体の２つのクラスターのみで構成されているとしているため、他の集合体の場合、誤差が大きくなっている。特に、単純立方体よりも間隙率が大きな場合に、真の配位数と計算値とでは誤差は大となり $\overline{n}$ ≧0.5950では配位数は負となる。また、図－１からも明らかなように間隙率により配位数の取り得る範囲に差はみられるが、その範囲は４～12である。このことは他の等球径規則充填集合体も存在していることを示している。以上の結果から、等球径ランダム充填に於いても配位数と間隙率は密接な関係があるものの、局所的にみると間隙率の違いにより表－１に示した等球径規則充填構造のいろいろな組み合わせからなり、土壌全体では、複数個の充填構造体から成り立っていると考えられる。そこで本報告では Smithらの方法を以下のように修正することを提案する。もし土壌内の間隙率の分布がわかれば、ある間隙率周辺の充填構造は表－１に示される５つの充填方法の内（角柱体充填と面心四面体充填は充填の方法が異なるだけで物性特性は同じなので１つと考える）その間隙率を挟む２つの規則充填の混合体として表すことが可能であろう。すなわち、その間隙率付近の充填構造はもっともこの間隙率に近い２つの規則集合体のみから成り立っているものとする。この間隙率から２つの等球径規則充填の混合割合が得られる。この混合割合より１球あたりの接触数、すなわち配位数




図－２　間隙率と配位数の関係

が計算できる。具体的には以下の方法による。今、間隙率$n$が Kezdi充填と単純立方体の間隙率の範囲内にあるものとすると、この間隙率を示す容積内の球のうち$x$を単純立方体充填として並んでいるものとし、残り$1-x$が Kezdi充填として並んでいる部分とすると、表－1より、単純立方体および Kezdi充填の間隙率はそれぞれ0.4764, 0.7382であるから

$$n=0.4764x+0.7382(1-x) \tag{3}$$

となる。よって、$x$は

$$x=\frac{0.7382-n}{0.2618} \tag{4}$$

となる。また、単純立方体、Kezdi充填の単位容積中の球の数はそれぞれ$1/(8R^3)$, $1/(16R^3)$であるから、混合体中の1球あたりの平均の接触点数、すなわち配位数は

$$N=\frac{6x/(8R^3)+4(1-x)/(16R^3)}{x/(8R^3)+(1-x)/(16R^3)} \tag{5}$$

となる。この計算を全ての間隙率の分布に対して行うと土壌内部の配位数の分布を計算することができる。従って、配位数の分布を求めるには土壌内の間隙率分布の算定を行わなければならない。

## 4．土壌の間隙率分布の算定

先にも述べたように、土粒子の充填はランダム的であり、局所的にみるならば内部にアーチを形成し間隙率の大きな部分ができている部分もあれば、また相対的に他の部分では密の部分も存在しており、間隙率はある分布を持っている。これらの間隙率の分布を求めるため平均の間隙率 $\overline{n}$ からなる土壌を考える。この土壌が非常に小さな微少要素に分割されるとすると、その構造の不規則性のため、これらの微少要素の間隙率分布はある分布関数を持つことになる。この確率密度関数を$F(n)$とすると、土壌の平均の間隙率とその標準偏差$\sigma$はそれぞれ式(6), (7)で表される。

$$\overline{n}=\int_0^1 n\,F(n)\,dn \quad (6),\qquad \sigma^2=\int_0^1 (n-\overline{n})^2\,F(n)\,dn \quad (7)$$

この土壌から体積$V_s$を持ついくつかの標本を抽出し、その間隙率の確率分布を求めることにする。$V_s$はそれぞれm個の微少要素から成り立っているものとすると、1つの標本の間隙率$n_s$は微少要素iの間隙率を$n_i$として、次式で表される。

$$n_s=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i \tag{8}$$

ここで、mの数が大きいときを考えると、中心極限定理により、$n_s$の分布は正規分布に漸近する。よって、$n_s$の確率密度関数を$G(n_s)$とすると、

$$G(n_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_s}\exp\left\{-\frac{(n_s-\overline{n})^2}{2\sigma_s^{\,2}}\right\} \tag{9}$$

となる。ここに、$\sigma_s$は標本分布の標準偏差であり、$\sigma_s=\dfrac{\sigma}{\sqrt{m}}$ である。

Collins[7] は同様の手法により有孔物質の間隙率の分布の理論的考察を行い、微少要素を非常に小さくした場合、その要素は全て空隙を示すか、物質部分を示すかのどちらかであり、このためこの要素の大きさには限界値が存在するとして解析を行っている。この微少要素の体積を$\varepsilon$とすると、式(10)が得られ、$\sigma_s$は式(11)のように書き改められる。

$$\varepsilon=mV \quad (10),\qquad \sigma_s=\frac{\sigma}{\sqrt{m}}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{V}}\,\sigma \quad (11)$$

今、$\varepsilon$が非常に小さな値であるとすると、この微少要素は全て空隙部分であるか、あるいは全て土粒子部分を占めるかのいずれかとなり、$\overline{n}$ は0かまたは1のどちらかとなる。他方、多くの微少要素の中で、全て間隙であるならば、すなわち間隙率が1である割合は$\overline{n}$ であり、土粒子部分のみを含む割合は$1-\overline{n}$ であるから、$\varepsilon$は式(12), (13)で定義される値$\varepsilon_0$が存在しなければならない。

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0}\int_0^{\Delta n}F(n)\,dn=1-\overline{n} \qquad (12), \qquad \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0}\int_{1-\Delta n}^{1}F(n)\,dn=\overline{n} \qquad (13)$$

従って、式(7)は次式のように表される。

$$\sigma^2=\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0}\int_0^1(n-\overline{n})^2F(\overline{n})\,dn=\overline{n}(1-\overline{n}) \qquad (14)$$

最終的に、$V\rangle\ \varepsilon_0$として、$n_s$の確率密度関数$G(n_s)$は次式で与えられる。

$$G(n_s)=\sqrt{\frac{V}{2\pi\varepsilon_0\overline{n}(1-\overline{n})}}\ \exp\left\{-\frac{V(n_s-\overline{n})^2}{2\varepsilon_0\overline{n}(1-\overline{n})}\right\} \qquad (15)$$

## 5. あとがき

本研究では土粒子を等球径と仮定し、土壌内部の空間構造の考察を行った。本研究の主要な結論を以下に示す。

1)土粒子が全て等球径粒子から構成される場合、配位数と間隙率には密接な関係があることが見いだされた。

2)土壌内の間隙率分布が既知ならば、従来から提案されている平均間隙率と平均配位数の関係式を改良することにより土壌内の配位数の分布を与える方法を示した。

3)上記2)を行うために必要な土壌内の間隙率分布を推定する式を導いた。

本報告では土壌を構成する土粒子は全て等球径であるとの仮定の下に議論を進めてきたが、実際の土壌は粒径分布を持っている。この点に関して著者らは、粒径分布を有するような土壌に対する土粒子の配位数の分布の推定は粒径分布を説明変数として取り扱わなければならないと考えているが、この問題に関しては今後の課題としたい。

## 参考文献

1)中尾隆志・藤田睦博：等球粒子モデルを用いた不飽和浸透流の微視的解析，土木学会北海道支部論文報告集，第48号，pp.569-574，1992.

2)中尾隆志・藤田睦博：異球径粒子モデルを用いた土壌内水分の保水効果に関する研究，水文・水資源学会研究発表会要旨集，pp.130-133，1992.

3)Nakao T., Fujita M., Kudo M. and Nishimura T.:Retained Water in Soil Based on Probabilistic Pore Syructure, Proc. of International Congress on Modelling and Simulation, Vol 3., pp.937-942,1993.

4)最上武雄 編：土質力学，技報堂，pp.904-909，1969.

5)Kezdi, Arpad:Discussion to Winterkorn's Paper, Highway Res. Record, No.52, Mecanical and Physico-Chemical Properties of Soils, 1964.

6)Smith, W.G., Foote, P. D. and Busang, P. E.:Packing of Homogeneous spheres, Phy. Rev., Vol.34, pp.1271-1274,1929.

7)Collins, R. E.:Flow of Fluid through Porous Materials, Reinhold Publ. Cop. New York,1961.