

II-2

軟 X 線を用いた空隙分布の解析

北海道大学 学生員 西村貴之
 北海道大学 正員 藤田睦博
 北見工業大学 正員 中尾隆志

1. はじめに

山腹斜面における雨水の流れを不飽和浸透流として解析しようとする場合、体積含水率～サクシオンあるいは体積含水率～不飽和透水係数の関係式を与えなければならない。現段階ではこれらの関係式は実験的に求めざるを得ない。

本研究は粒径分布、空隙率が既知の条件下で土粒子の間隙の確率的構造を求めることにより、理論的に体積含水率～サクシオンの関係を導こうというものである。

2. 土粒子接合部に生じるリング水

図-1に示すような半径 R_1 、 R_2 の球形粒子間には接合部で水の表面張力によるサクシオンが発生し、リング水が形成される。リング水の曲率を r_1 、 r_2 とし水と空気との表面張力を σ 、また粒子と水の接触角を θ とすると水 (P_w) と空気 (P_a) の圧力差は次式で与えられる。

$$P_w - P_a = \sigma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.1)$$

r_1 、 r_2 を円弧と仮定すると図-1から次式を誘導できる。

$$r_1 = R_1 \sin \omega_1 + r_2 (\sin \omega_1 - 1) \quad (2.2)$$

$$r_2 = \frac{(R_1 + \delta)(R_1 + 2R_2 + \delta) + R_1 \{ R_1 - 2(R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1 \}}{2 \{ (R_2 - R_1) + (R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1 \}} \quad (2.3)$$

また水の体積は r_1 を積分することによって次のように得られる。

$$V_w = \pi \left[(A^2 + r_2^2) (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) - A r_2 \{ \sin \phi \cos (\omega_1 - \omega_2) + \pi - \phi \} \right] - \frac{\pi}{3} \left\{ r_2^3 (\cos^3 \omega_1 + \cos^3 \omega_2) + R_1^3 (1 - \cos \omega_1)^2 (2 + \cos \omega_1) + R_2^3 (1 - \cos \omega_2)^2 (2 + \cos \omega_2) \right\}$$

ここで $A = r_1 + r_2$ $\phi = \omega_1 + \omega_2$ (2.4)

以上の(2.1)、(2.4)式からサクシオン、体積含水率がともに空隙分布に依存することがわかる。

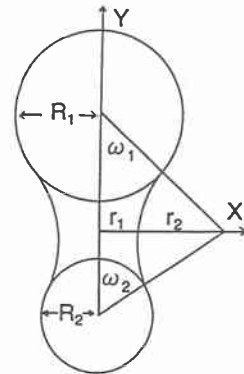


図-1 土粒子接合部のリング水

3. 空隙構造解析

上述の理論を適用するためには、土粒子間の空隙構造を明らかにしなくてはならない。そこで、粒径分布 $N(r)$ (以下、半径を r で表す。) と空隙率 λ が既知であるような土に球形土粒子を想定し、この土粒子

の空隙分布解析を確率論的に行うが、以下簡単のために平面の円で考える。

図-2のように円が2つある場合を想定すると、円の隣接部分の距離は $\delta = \ell - (r_1 + r_2)$ と表されるので、 δ の分布 $p(\delta)$ は粒径分布 $N(r)$ と中心間距離の分布 $g(\ell)$ を用いれば、たたみこみ積分で求められる。今、 $N(r)$ を既知としているのでまずは $g(\ell)$ を求めることにする。

1)参考文献-1より粒径分布 $N(r)$ の粒子を体積 V_u の容器に空隙率 λ で充填したとき、その粒子数 x の確率密度関数は次式で与えられる。

$$F(x) = \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi x} \sigma_v} \exp\left\{-\frac{\{\bar{V}x + V_u(1-\lambda)\}^2}{2x\sigma_v^2}\right\}$$

ここで \bar{V} : 粒子体積の平均値
 σ_v : 粒子体積の標準偏差

(3.1)

ただし今は平面の円で考えているので、上式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\bar{S}}{\sqrt{2\pi x} \sigma_s} \exp\left\{-\frac{\{\bar{S}x + S_u(1-\lambda)\}^2}{2x\sigma_s^2}\right\} \\ &= \frac{\bar{S}}{\sqrt{2\pi x} \sigma_s} \exp\left\{-\frac{\{\bar{S}x + \bar{S}\}^2}{2x\sigma_s^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \mu} \exp\left\{-\frac{\{x + \bar{x}\}^2}{2x\mu^2}\right\} \quad (3.1') \end{aligned}$$

ここで \bar{S} : 円面積の平均値
 σ_s : 円面積の標準偏差
 μ : 変動係数

ここで平面に分布している円の中心点に着目すると、それらはおおよそ平面上に無作為に配置された点の集団、すなわちポアソン分布の集団と考えられる。よって(3.1')式の μ を1として、ポアソン分布式(3.2)と比較してみる(図-3)。

$$B(x) = \frac{m^x}{x!} \exp(-m) \quad (3.2)$$

m : x の平均値

図-3からほぼ2つの式が漸近していることがわかるので、変動係数 μ が1であるという仮定のもとで(3.1')を次の(3.3)式に近似する。

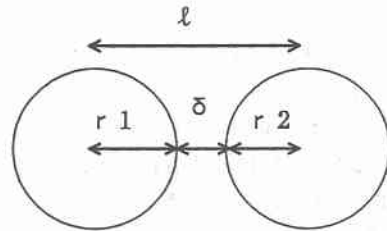


図-2 空隙モデル

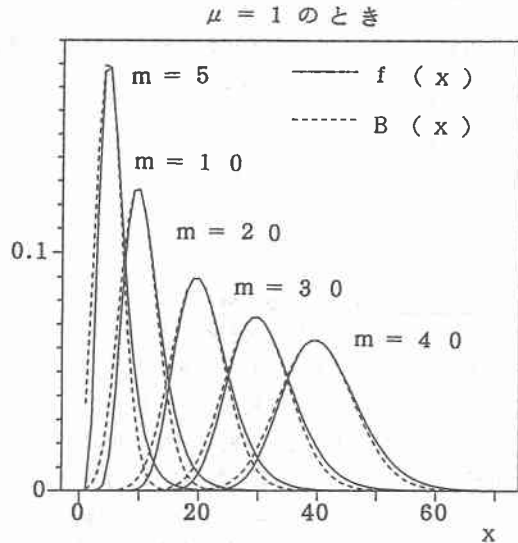


図-3 $f(x)$ と $B(x)$ の比較

$$F(x) = \frac{(a\bar{n})^x}{x!} \exp(-a\bar{n}) \quad a: \text{面積} \quad \bar{n}: \text{単位面積中にある点の期待値} \quad (3.3)$$

すなわち点の密度

$a\bar{n}$: 面積 a 中にある点の数の期待値

さて任意の1点をとったとき、その点からもっとも近い他の点に至るまでの距離を l_{min} で表すことにする(図-4)。すると l_{min} が l と $l+dl$ の間にある確率 $g(l)dl$ は次の2つの事象が複合したものを見ることができる。

1つはある点から半径 l の円内には全く他の円が存在しない、つまり πl^2 の面積中では $x=0$ であること。もう1つは半径 l と $l+dl$ の円で区切られた幅 dl の微小な環状面積中に少なくとも1個の円が存在する、つまり $2\pi l^2$ の面積中では $x \neq 0$ であることである。以上の2つを考慮すると、確率 $g(l)dl$ として

$$\begin{aligned} g(l)dl &= F(0)_{a=\pi l^2} F(x \neq 0)_{a=2\pi l dl} \\ &= \exp(-\pi l^2 \bar{n}) \{1 - \exp(-2\pi l dl \cdot \bar{n})\} \\ &= 2\pi \bar{n} l \exp(-\pi \bar{n} l^2) dl \end{aligned} \quad (3.4) \text{を得る。}$$

2) $r_1+r_2=z$ とし z の確率密度関数を $h(z)$ とすると、たみこみにより次の(3.5)式を得る。

$$h(z) = \int N(r)N(z-r)dr \quad (3.5)$$

3) 以上の $g(l)$ 、 $h(z)$ から δ の確率密度関数として次の(3.6)式を得る。

$$\begin{aligned} p(\delta) &= \int h(z)g(\delta+z)dz \\ &= \int_{2r_{min}}^{2r_{max}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} N(r)N(z-r)g(\delta+z)dr dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. シミュレーションによる実験

ある粒径分布をもった円を多数発生させて、仮想上の球形土粒子群を作るコンピュータシミュレーションを行った。面積の変動係数が1となるように、粒径分布には図-5のような離散的な分布を用い、空間の面積は10000平方mmを想定したところ、空隙率0.58、全粒子数658個を得た。このシミュレーション結果からそれぞれの円の隣接距離 δ を求め、その分布のようすを(3.6)式と比較してみた(図-6)。

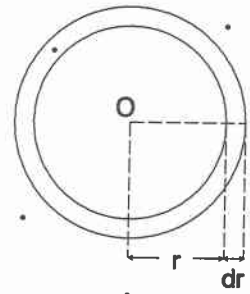


図-4 点の最短距離の定義

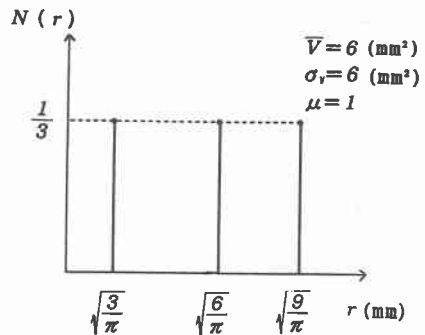


図-5 シミュレーションで用いた粒径分布

結果はどちらも指数分布的に減少していて、これは予想していた空隙分布と一致する。しかし、理論値の勾配に比べてシミュレーション値の勾配が急になっている。

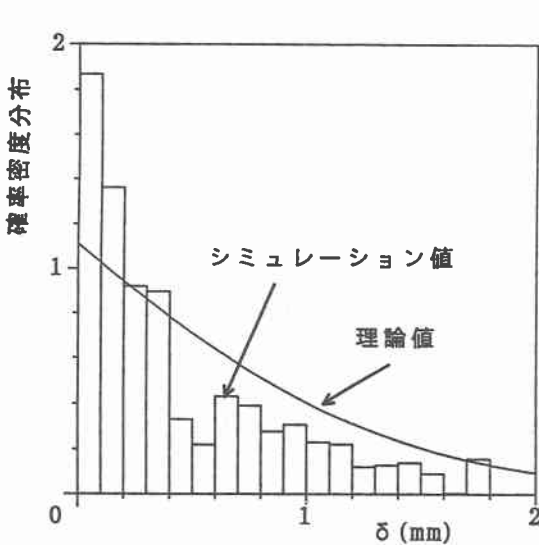


図-6 空隙に関する理論値とシミュレーション値の比較

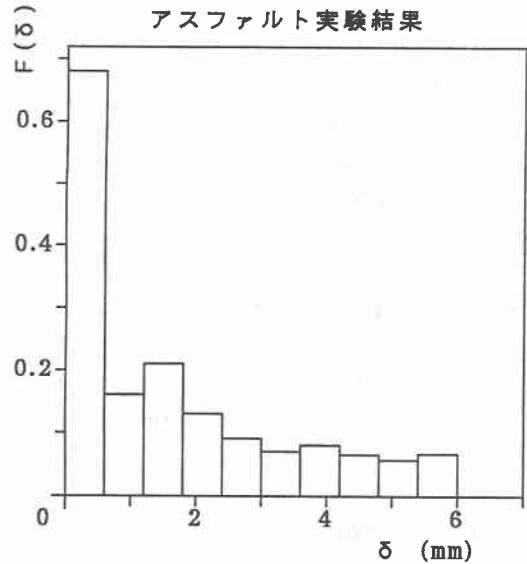


図-7 空隙に関するアスファルトの実験値

5. ガラスビーズを用いた実験

変動係数 $\mu=1$ という条件を満たしてはいないが、以前に行った実験結果を図-7に示す。実験内容は箱に敷き詰めたガラスビーズ玉をアスファルトで固定し、それをダイヤモンドカッターで薄くスライスして、得られた断面から得られたビーズ玉の径、中心の座標より粒子間の距離のヒストグラムをもとめるものである。使用したビーズ玉の粒径分布より、このときの変動係数は0.9であった。このときも指数分布的に減少しており、理論と今回のシミュレーションに近い形となっていた。

6. まとめ

理論計算して求めた曲線が指数分布的になったのは、普通に考えて予想される分布と同じであるが、シミュレーションの結果が理論値からはずれた部分は、円の個数の658個というのが少なかったものと思われる。もっとたくさんの円で空隙を調べればよかったと思う。また理論の中にポアソン分布を用いるため、円面積の変動係数 $\mu=1$ となるような粒径分布のみを今は考えたが、実際の土でもそうであるとは限らない。よって今後はいかなる変動係数、粒径分布をもった土の場合でも適用できるように、理論を改良していく必要がある。

本研究は文部省科学研究一般研究B(代表、藤田陸博)の補助を受けたものである。関係各位に謝意を表します。

参考文献：1)藤田陸博・中尾隆志・西村貴之、球形土粒子の空隙分布の解析、平成4年度土木学会道支部論文報告集。2)諏訪紀夫、定量形態学。