

I-65

構造材料のレイアウト最適化問題に関する基礎的研究

北海道大学工学部 正会員 佐々木 康彦
 北海道大学工学部 学生員 実 広 拓史
 北海道大学工学部 正会員 三 上 隆

1. はじめに

ある規準に基づいて構造材料の空間的な配分あるいは分布を求める問題はレイアウト最適化問題と呼ばれている。レイアウト最適化問題は構造設計に関連した重要な問題の一つであり、汎用性に優れ、かつ実用的な最適化手法を求めて研究が続けられている。

本研究では、均質化法を参考として構造材料の単位微細構造を仮定し、体積比の制約のもとで目的関数である平均コンプライアンスを最小化するような最適性規準を用いて、「構造材料のレイアウト最適化問題（最適配分問題）」に関する基礎的な数値解析を行った。

2. 最適性規準法 (optimality criteria method)

数値計画法を用いた最適化は、構造物に限らず、その対象を数式にモデル化し、数学モデルとして解くため、あらゆるものの最適化に適用でき、非常に汎用性に富む。しかし、その基本は繰り返し手法であり、最適解を得るまでにある程度の反復回数を必要とする。そのため、最適解への収束性や設計に要する計算時間、容量が問題になってくる。

構造設計の場合は対象は構造物に限られている。構造物の応答にはある種の特性があり、それを用いることによって、繰り返し回数を大幅に減少させるアルゴリズムを組み立てることが可能ではないかと考えられた。これが最適性規準法である。

最適性規準法は、静的・動的問題、系の安定問題にかかわらず、目的関数とある特定の制約条件から構成されるラグランジュ関数の停留値を求める問題として定式化され、この停留値になる条件が最適性規準となる。そして設計変数およびラグランジュ乗数が、一般には漸化式で表現され、この最適性規準を満たした解を求めるまで反復計算されるのが最適性規準法であると言える。

3. 構造材料の微細構造と構造最適化 (structural optimization)

本研究では均質化法 (homogenization method) を参考として定式化を行うので、まず均質化法について概要を述べる。

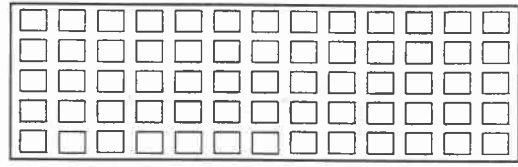
均質化法によるレイアウト最適化は例えば次のように行われる。2次元の弾性問題の例では、図1(a)に示すように、設計する領域 (design domain) の全体にわたり、例えば非常に小さな長方形の穴が規則正しく、周期性をもって空いていると仮定する。すなわち同図(b)のような単位微細構造 (unit cell) が多数集まって設計すべき領域が構成されているものとする。そして例えば同図(b)に示す単位微細構造の穴の大きさ a ($0 \leq a \leq 1$)、 b ($0 \leq b \leq 1$)、およびその角度 θ を設計変数にとり、設計領域の体積あるいは質量を制約して、系の平均コンプライアンスを最小化するような最適化問題を設定する。

なお、平均コンプライアンスとは、ひずみエネルギーの2倍、全ポテンシャルエネルギー

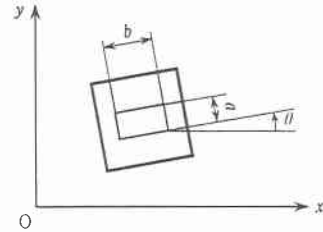
のマイナス2倍に等しく、平均コンプライアンスを最小化することは全ポテンシャルエネルギーを最大化することを意味する。

最適化計算の結果、各单位構造の穴の寸法 a 、 b と角度 θ が決定されれば、それを図示することによって構造材料のレイアウト最適化に対する情報が得られる。

この均質化法を参考に、最適化問題として「構造材料のレイアウト最適化問題」を考える。具体的には、構造材料の体積比を制約し、そのもとで目的関数である平均コンプライアンスを最小化するように、設計変数 a 、 b 、 θ 、およびラグランジュ乗数 λ を更新していく。



(a) 設計領域と微細構造の仮定



(b) 単位微細構造と設計変数

図1. 設計領域の微細構造の仮定と設計変数

4. 解析アルゴリズム

構造最適化にあたって、まず設計領域を有限要素法で離散化する。全体のアルゴリズムは以下のとおりである。

- ①設計変数の初期値設定：
- ②弾性定数の計算：

各要素ごとに、 a 、 b 、 θ の値に対応する弾性定数（弾性テンソル）を計算する。

a 、 b の値は区間 $[0, 1]$ で無数に存在するので、それに対応する弾性定数も無数に存在する。そこで均質化法では、 a 、 b それぞれの区間 $[0, 1]$ を何等分かにして「離散化」した a 、 b についてそれぞれ弾性定数を計算し、それらをラグランジュ多項式で補間するという方法をとるが、本研究では簡単のため以下の近似式を用いる。

$$E_{ijkl}^H = (1-a)(1-b) E_{ijkl} \quad (1)$$

ここで、 E_{ijkl} は中実部分を等方性材料とした場合の弾性定数である。

この E_{ijkl}^H を以下の式を使って角度 θ だけ回転させると、 a 、 b 、 θ の値に対応する弾性定数（弾性テンソル） E_{ijkl}^G が求まる。

$$E_{ijkl}^G = \sum_{I,J,K,L=1}^2 E_{IJKL}^H(a, b) R_{iI}(\theta) R_{jJ}(\theta) R_{kK}(\theta) R_{lL}(\theta) \quad (2)$$

ここで、 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ である。

- ③有限要素法による応力解析：
- ④最適性規準法による設計変数の更新：

目的関数と制約条件からなるラグランジュ関数の停留値として得られる最適性規準より、 a 、 b 、 θ 、 λ の漸化式が以下のように得られる。

$$a^{(k)} = \text{Min} \{ \text{Max} \{ 0, a^{(k-1)} - \rho_a^{(k)} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{(k)}}{\partial a} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_l^{(k)}}{\partial x_j} + \lambda^{(k-1)} b^{(k-1)} \right) \}, 1 \} \quad (3)$$

$$b^{(k)} = \text{Min} \{ \text{Max} \{ 0, b^{(k-1)} - \rho_b^{(k)} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{(k)}}{\partial b} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_l^{(k)}}{\partial x_j} + \lambda^{(k-1)} a^{(k-1)} \right) \}, 1 \} \quad (4)$$

$$\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)} - \rho_\theta^{(k)} \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_l^{(k)}}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$\lambda^{(k)} = \text{Min} \{ 0, \lambda^{(k-1)} - \rho_\lambda^{(k)} \left(\int_{\Omega_d} (1 - a^{(k)} b^{(k)}) d\Omega - \Omega_s \right) \} \quad (6)$$

ここで、 $\rho_a^{(k)}, \rho_b^{(k)}, \rho_\theta^{(k)}, \rho_\lambda^{(k)}$ は収束性に関係する値で、任意の正数である。

また、 Ω_d は設計領域の体積、 Ω_s は制約体積である。

⑤手順②～④を繰り返す。

5. 解析例

数値解析例としては図2に示すような、片持ち板の先端中央に荷重が作用するモデルを考えた。以下の数値計算で用いた諸量は、片持ち板の寸法が横60cm、縦40cm、厚さ2cm、分割数が横方向12、縦方向6である。また、中実部分の材料は等方性とし、その弾性係数を $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比を0.3とした。先端中央荷重は上向きに100kgfである。また、要素の穴の大きさa、bの初期値として、制約した体積比に近い値を全要素に均等に与えた。このもとで、平均コンプライアンスを最小化するように材料のレイアウト最適化（最適配分）を行った。

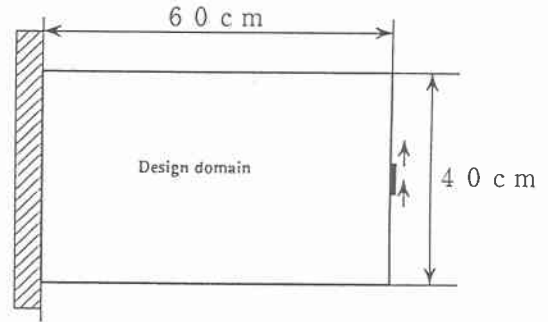


図2. 数値解析モデル

解析結果を図3に示す。体積の制約としては、片持ち板に全く穴の空いていない状態の体積を100%として、体積比80%、60%、40%の3ケースを考え、それぞれのケースにおける密度分布を図示した。密度dは、要素内に全く穴の空いていない状態（ $a = b = 0$ ）を $d = 1$ 、完全に穴の空いた状態（ $a = b = 1$ ）を $d = 0$ とし、その他は $d = 1 - ab$ で計算した。密度分布は4段階で示し、3ケースとも、初期状態より密度が大きい要素を濃い2段階で、初期状態より密度が小さい要素を薄い2段階で示した。

解析結果を見ると、密度分布は片持ち板の応力状態に対応して決まっていると考えられる。具体的には、固定端上縁部、固定端下縁部、荷重作用点の密度が大きくなり、固定端中央、先端上縁部、先端下縁部等の密度が小さくなっている。

また、体積比80%、60%、40%の3ケースを比較すると、固定端上縁部、固定端下縁部、荷重作用点の密度が大きくなり、固定端中央、先端上縁部、先端下縁部等の密度が小さくなるという点では共通性がある。一方、体積比が小さくなると、固定端上縁部と固定端下縁部を連結する部分の密度が小さくなるという相違性が見られる。これは、体積比を小さ

くすると（使用できる材料が少ないと）より主要な構成部分にのみ密度が配分されるためと考える。

さらには、密度分布図において濃い2段階の部分をお他の部分に比べてより重要な構造であるとみなすと、体積比80%、60%、40%それぞれのケースで主要な構成部分が浮かび上がってくる。このような解釈はレイアウト最適化手法が構造形状（形態）の最適化にも拡張が可能であることを示唆している。

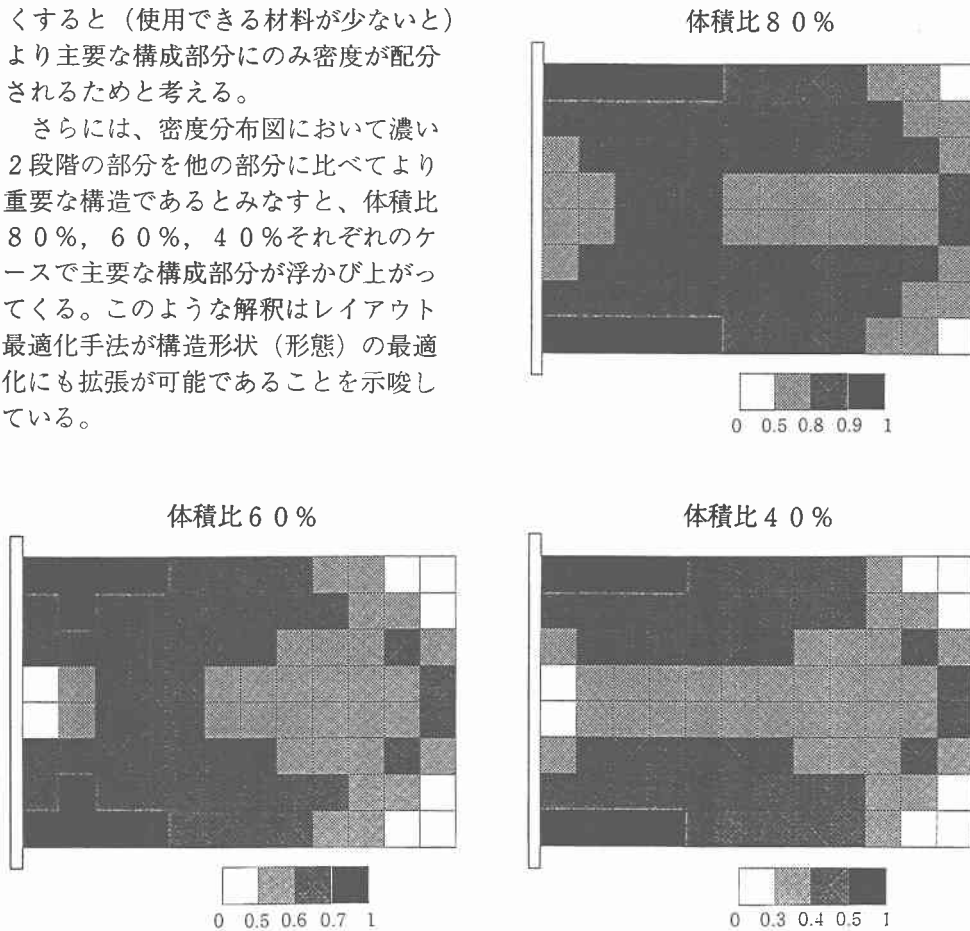


図3. 片持ち板の密度分布図

参考文献

- 1) K. Suzuki and N. Kikuchi: A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 93 (1991) 291-318.
- 2) M. P. Bendsoe and N. Kikuchi: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71 (1988) 197-224.
- 3) M. Bremicker, M. Chirehdast, N. Kikuchi and P. Y. Papalambros: Integrated topology and shape optimization in structural design, Mech. Struct. & Mach., 19 (4) (1991) 551-587.
- 4) 鈴木克幸、菊池昇、大坪英臣: マイクロストラクチャーを用いた平板の最適形状レイアウト設計 (1992).
- 5) 構造工学委員会 構造システム最適化研究小委員会: 構造システム最適化の現状と将来, 土木学会論文集 No. 450 / I-20 (1992) 1-12.
- 6) 山川宏: 最適化デザイン, 計算力学とCAEシリーズ9, 培風館 (1993).