

I-60

Levinson理論による連続桁の固有振動解析

北海道大学工学部	正員	林 川 俊 郎
北海道大学工学部	学生員	椋 平 剛 史
北海道大学工学部	正員	佐 藤 浩 一
北海道大学工学部	正員	平 沢 秀 之

1. まえがき

走行荷重、風といった動的荷重によって引き起こされる連続桁の振動に対する設計や応答の評価を行う上で、固有振動解析は重要と考えられる。これまでに用いられてきた桁の解析理論としては、古典的な梁理論とも言われる Bernoulli-Euler理論がある。支間長に対して桁高が高くなると、せん断変形による影響が無視できなくなるため、一般的に、このせん断変形を線形と仮定することによって定式化されたTimoshenko理論が知られている。最近せん断変形の2次変形量を考慮したLevinson理論が発表された^{1)・2)}。図-1に示すように、桁の中立軸に対して変形前における垂直な断面を考えると、この断面は変形後においてBernoulli-Euler理論では中立軸に対して垂直な平面のままであるが(平面保持)、Timoshenko理論では中立軸に対しある一定の傾きをもった平面と仮定している。さらにLevinson理論では水平方向にx軸、鉛直方向にz軸をとると、x軸方向の変位uがzの3次関数で表される曲面と仮定されている。

本研究は、このLevinsonの理論によって得られる連続桁の固有円振動数が、境界条件、ポアソン比、支間長に対する桁高の大きさによってどのような影響を受けるか、Bernoulli-Euler理論、Timoshenko理論との数値解析結果の比較によって検討する。なお、この研究においては長方形断面における数値解析を取り扱うものとする。

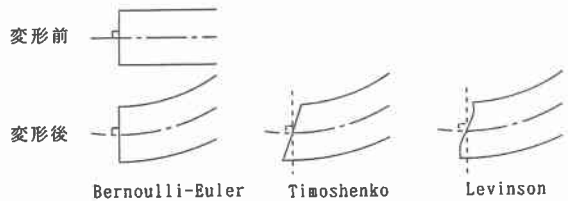


図-1 変形前後の断面形状の仮定

2. 基礎微分方程式(解析理論)

Levinson理論による桁の基礎微分方程式は式(1)、(2)のように与えられ、両式から ϕ を消去することによって、鉛直たわみ w に関する偏微分方程式(3)を得る^{1)・2)}。

$$K_1 A G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$K_1 A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) + E I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{E I \rho}{K_3 G} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{K_3 G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{K_1 G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (3)$$

ここで、 w :たわみ、 ϕ :たわみ角、 A :断面積、 I :断面二次モーメント、 E :ヤング係数、 G :せん断弾性係数、 ρ :密度、 K_1 、 K_3 :せん断補正係数。

式(3)の一般解を求めるために、固有円振動数を ω 、支間長を L として、解を式(4)のように仮定すると、特性方程式は式(5)のように得られる。

$$w = w(x, t) = W(x) \exp(i\omega t), \quad \phi = \phi(x, t) = \Phi(x) \exp(i\omega t) \quad (4)$$

ここで、 $W(x) = \exp(\lambda x/L)$ 、 $\Phi(x) = \exp(\lambda x/L)$ 、 i は虚数である。

Natural Vibration Analysis of Continuous Beams by Levinson Theory

by Toshiro HAYASHIKAWA, Goshi MUKUHIRA, Koichi SATO and Hideyuki HIRASAWA

$$\lambda^4 + b^2(r^2 + s_3^2)\lambda^2 - b^2(1 - b^2r^2s_1^2) = 0 \quad (5)$$

$$\text{ここで、} b^2 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad s_1^2 = \frac{EI}{K_1 GAL^2}, \quad s_3^2 = \frac{EI}{K_3 GAL^2}$$

$$\text{さらに } W = \frac{b^2(r^2 + s_3^2)}{2}, \quad Z = \sqrt{1 + \frac{4(1 - b^2r^2s_1^2)}{b^2(r^2 + s_3^2)^2}} \quad \text{とおくと} \omega \text{の大きさによって式(5)の解が異なる。}$$

そこで以下のように場合分けをして $W(x)$ 、 $\Phi(x)$ を求める。

a) $Z \geq 1$ のとき:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{W(Z-1)} = \pm \nu, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{W(Z+1)} = \pm i\mu \quad \text{とおくと、}$$

$$W(x) = A \cos \frac{\mu}{L} x + B \sin \frac{\mu}{L} x + C \cosh \frac{\nu}{L} x + D \sinh \frac{\nu}{L} x \quad (6)$$

$$\Phi(x) = R\mu \left(A \sin \frac{\mu}{L} x + B \cos \frac{\mu}{L} x \right) + R\nu \left(C \sinh \frac{\nu}{L} x + D \cosh \frac{\nu}{L} x \right) \quad (7)$$

$$\text{ここで、} R\mu = -\frac{3K_1 b^2 s_1^2 - 2\mu^2}{2\mu L}, \quad R\nu = -\frac{3K_1 b^2 s_1^2 + 2\nu^2}{2\nu L} \quad \circ$$

b) $Z < 1$ のとき

$$\lambda_{1,2} = \pm i W(1-Z) = \pm i\nu, \quad \lambda_{3,4} = \pm i W(1+Z) = \pm i\mu \quad \text{とおくと、}$$

$$W(x) = A \cos \frac{\mu}{L} x + B \sin \frac{\mu}{L} x + C \cos \frac{\nu}{L} x + D \sin \frac{\nu}{L} x \quad (8)$$

$$\Phi(x) = R\mu \left(A \sin \frac{\mu}{L} x - B \cos \frac{\mu}{L} x \right) + R\nu \left(C \sin \frac{\nu}{L} x - D \cos \frac{\nu}{L} x \right) \quad (9)$$

$$\text{ここで、} R\mu = -\frac{3K_1 b^2 s_1^2 - 2\mu^2}{2\mu L}, \quad R\nu = -\frac{3K_1 b^2 s_1^2 - 2\nu^2}{2\nu L} \quad \circ$$

連続桁の両端における境界条件は、 $M(x)$ をモーメント、 $Q(x)$ をせん断力とすると、回転端: $W(x)=M(x)=0$ 、固定端: $W(x)=\Phi(x)=0$ 、自由端: $M(x)=Q(x)=0$ と表される。中間支点における連続条件は、 $W_{i-1}(L_{i-1})=W_i(0)=0$ 、 $\Phi_{i-1}(L_{i-1})=\Phi_i(0)$ 、 $M_{i-1}(L_{i-1})=M_i(0)$ と与えられる。したがって、連続桁の支持条件式に式(6)～(9)を代入することにより、次のマトリックス関係式が求められる。

$$[A]\{a\} = \{0\} \quad (10)$$

ここで、 $\{a\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_N, B_N, C_N, D_N\}^T$ 、 $[A]$ は大きさ $4N \times 4N$ (N は径間数)の係数マトリックスである。さらに、 $\{a\} \neq \{0\}$ であるから振動数方程式は次のように求められる。

$$\det |A| = 0 \quad (11)$$

式(11)は固有円振動数 ω を含んだ超越方程式となるが、Regula-Falsi法により容易に解を求めることができる。

3. 数値解析結果

3-1. 単径間の桁の場合

はじめに連続桁の基本となる単径間における桁の固有振動解析を行う。解析に使用する桁の断面諸元は、ヤング係数: $E = 2.1 \times 10^7$ (tf/m²)、せん断弾性係数: $G = 8.1 \times 10^6$ (tf/m²)、単位体積重量: $\gamma = 7.85$ (tf/m³)、支間長: $L = 20$ (m)、単位幅・桁高: h の長方形断面で、 h を1、2 (m) (各々 $h/L = 0.05, 0.1$)、Timoshenko、Levinsonの両理論に関してはポアソン比 ν を0.0、0.3、0.5と変化させ、両端の境界条件(回転、固定、自由)の組み合わせ6通りについて3理論の比較検討を行う。図-2はポアソン比 $\nu = 0.3$ 、桁高比 $h/L = 0.1$ の単純桁において、Timoshenko、Levinsonの両理論で求めた固有円振動数 ω^* と、Bernoulli-Euler理論で求めた固有円振動

数 ω_B との比を表したものである。図-3は同じく $\nu=0.3$ 、 $h/L=0.1$ の両端固定桁における ω^* と ω_B の比を表したものである。一般的に、せん断変形を考慮したTimoshenko理論とLevinson理論により求められた固有円振動数の値はBernoulli-Euler理論によるものより小さくなる傾向がある。特に高次固有振動モードにおいては、その差異が顕著となる。たわみ角を拘束する両端固定桁の場合には、Levinson理論による固有円振動数 ω_L はTimoshenko理論による固有円振動数 ω_T よりやや小さな値となっている。また単純桁の場合には、両者の数値解析結果はほぼ等しい値を与えている。図-4は $h/L=0.05$ 、 $\nu=0.0$ の単径間の桁の境界条件の差異による固有円振動数比 ω_L/ω_T の値と固有振動モード次数との関係を示したものである。ポアソン比が $\nu=0.0$ の場合、単純支持または自由端のみをもつ桁の固有円振動数は、Levinson理論とTimoshenko理論において同一の値となるため、常に $\omega_L/\omega_T=1.0$ となる。しかし、固定端を有する桁ではたわみ角 $\phi=0$ が拘束されているため、Levinson理論による固有円振動数 ω_L はTimoshenko理論による固有円振動数 ω_T よりも若干小さな値となっている。さらに、両端固定桁においては両者の差は大きくなる傾向にある。このことは桁のせん断による2次変形の影響は桁端部の幾何学的拘束条件(たわみ角)に依存するためと考えられる。図-5は $h/L=0.05$ の単純桁、並びに両端固定桁におけるポアソン比の影響を示した。いずれの境界条件においてもポアソン比が増加するに従い、Timoshenko理論の解よりもLevinson理論の解の方が増加の割合が大きくなっている。さらに高次モードになるにつれてポアソン比の影響が大きく現れている。図-6は $\nu=0.3$ の両端固定桁における桁高比 h/L の影響を示したものである。

桁高比が小さい場合には、Timoshenko理論の解とLevinson理論による解との差異はそれほど認められない。しかし、桁高比が大きくなると、低次モードと高次モードにおいてその差異が現れている。

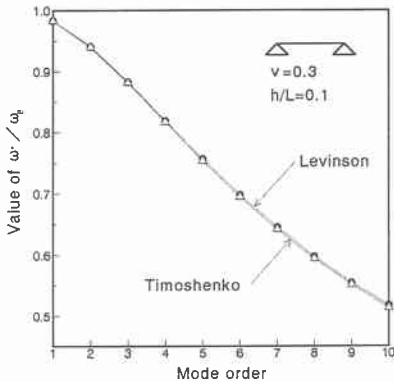


図-2 単純桁の場合

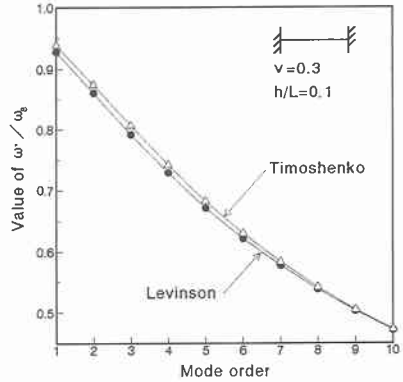


図-3 両端固定桁の場合

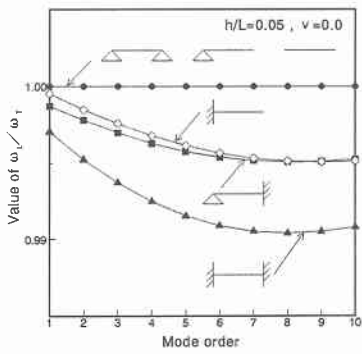


図-4 境界条件の影響

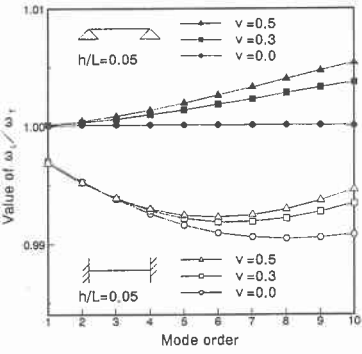


図-5 ポアソン比の影響

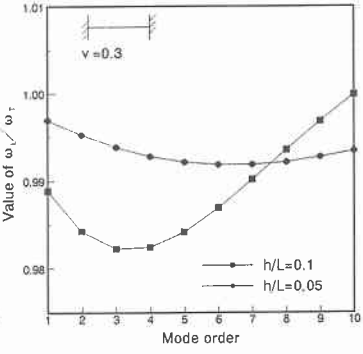


図-6 桁高比の影響

3-2. 連続桁の場合

数値計算に用いた連続桁の断面諸元は3-1の単径間の桁と同一の値を用いるものとする。ここでは連続桁におけるせん断変形の基本的な影響を調べるために、単純支持された等径間等断面を有する2径間および3径間連続桁を取り上げる。Timoshenko理論およびLevinson理論により求められた固有円振動数 ω_L および ω_T とBernoulli-Euler理論による固有円振動数 ω_B との比を2径間、3径間連続桁についてそれぞれ図-7、図-8に示す。2径間連続桁においては $\{2(n-1)+1\}$ 次(n は正の整数)、3径間においては $\{3(n-1)+1\}$ 次に単径間と同じ固有振動モードが現れ、固有値は π の整数倍となる。従って、この固有値を持つ固有振動モードは単純桁の場合と同様に、Levinson理論による固有円振動数の値がTimoshenko理論による固有円振動数の値よりやや大きな値となっている。その他の固有振動モードについては図-9に示す固有振動モードからもわかるように、連続桁の中間支点上でたわみ角が拘束または拘束に近い状態になるため、Timoshenko理論による解よりLevinson理論の解が小さな値となっている。

4. あとがき

本研究では、Levinson理論によって得られる固有円振動数が、境界条件、ポアソン比 ν 、桁高比 h/L によってどのような影響を受けるのか、Timoshenko理論による解、およびBernoulli-Euler理論による解との比較により検討した。ここで得られた結論を要約すると以下の通りである。

- 1) 支間長に対する桁高の比が大きくなるとせん断による変形の影響が大きくなり、Timoshenko理論による固有円振動数、Levinson理論による固有円振動数ともにBernoulli-Euler理論によるものより減少する傾向があるが、Levinson理論によるものの方が小さな値を与える。
- 2) ポアソン比による影響はTimoshenko理論よりもLevinson理論の方が受けやすく、両者の解の差は高次モードになるほど大きくなる。
- 3) たわみ角を拘束する単径間の桁の場合、および拘束または拘束に近い状態になる中間支点を有する連続桁の場合、Levinson理論による固有円振動数はTimoshenko理論による固有円振動数よりも小さな値を与える。
- 4) 多径間連続桁において固有振動モード次数が $\{N(n-1)+1\}$ 次(N は径間数、 n は正の整数)のとき単純桁における n 次固有値(固有円振動数)と一致し、他の固有振動モードではTimoshenko理論による固有円振動数よりLevinson理論による固有円振動数の方が小さな値となる。

(参考文献)

- 1) Levinson. M.: A new rectangular beam theory, Journal of Sound and Vibration, 74(1), pp. 81-87, 1981.
- 2) Stephen. N. G and Levinson. M.: A second order beam theory, Journal of Sound and Vibration, 67, pp. 293-305, 1979.

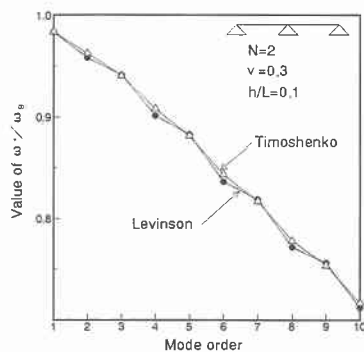


図-7 2径間連続桁

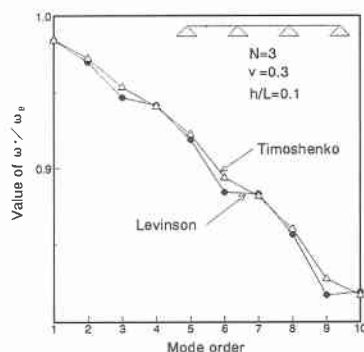


図-8 3径間連続桁

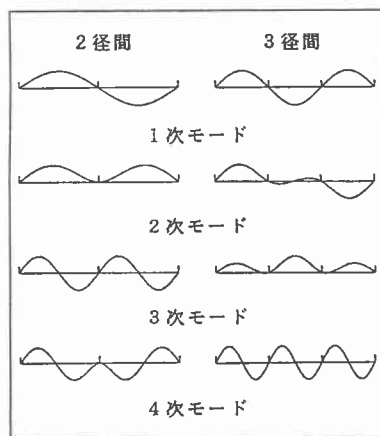


図-9 固有振動モード