

I - 59

3次元骨組構造物の固有値の精度について

北海道大学工学部 正員 林川 俊郎
 北海道大学工学部 武村 信也
 北海道大学工学部 正員 小幡 卓司
 北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、一般的に構造物に作用する外力の性質と、構造物自身をもつ固有振動数、固有振動モード、減衰定数等に大きく依存している。したがって、構造物の動的応答性状を調べるためには、構造物の固有振動数および固有振動モードを良い精度で計算することが重要といえる。

構造物の固有振動解析は、運動方程式の一般解を用いて動的な剛性マトリックスを誘導し、固有値を求める厳密解法（連続質量法）と、構造物の質量を多質点系に離散化し解を求める近似解法（集中質量法あるいは整合質量法）の2通りに大きく分けられる^{1), 2)}。

筆者らは、連続桁、アーチ橋、およびVレグラーメン橋のような平面骨組構造物の固有値の精度について数値解析的な検討を行ってきた。また、動的剛性マトリックスを固有円振動数 ω についてTaylor展開することにより、集中質量法、整合質量法、および連続質量法の特徴について数学的に考察してきた³⁾。

本研究では、2種類の3次元骨組構造物のモデルを用いて、集中質量法、整合質量法および連続質量法による数値計算を行い、各手法で求められた固有値の精度について比較検討するものである。

2. 固有振動解析

骨組構造物の固有振動解析は、その構造物のモデル化によって離散座標系による解と分布座標系による解に分類できる。離散座標系においては、部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に等しく置換する集中質量法（Lumped Mass Method）と、軸変形には1次式および曲げ変形には3次式の変位関数を用いて部材要素の質量を分配する整合質量法（Consistent Mass Method）とがある。分布座標系においては、骨組構造物の質量や剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱い、動的な剛性マトリックスを用いる連続質量法（Continuous Mass Method）がある。

2-1. 離散座標系

図-1に示すような立体骨組部材について考える。

静的剛性マトリックスの誘導において、軸変形には1次のベキ級数、曲げ変形には3次のベキ級数で部材要素の変位関数を仮定する。骨組構造物の微小変形時には、軸変形、面内および面外の曲げ変形、ねじり変形を伴う振動がそれぞれ独立しているものとして取り扱うことができる。したがって、軸変形、面内と面外の曲げ変形、ねじり変形についての剛性マトリックスを

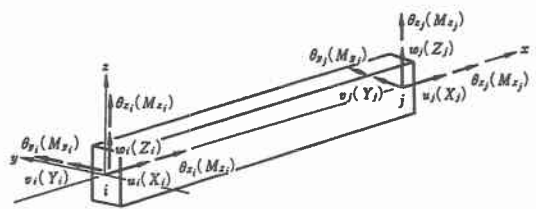


図-1 立体骨組部材

単純に重ね合わせることで立体骨組部材の静的剛性マトリックスが得られる。次に質量マトリックスの取り扱い方については、部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に配分する集中質量法と、静的剛性マトリックスの誘導に用いられた同じ変位関数を用いて部材要素の全質量を両節点に配分する整合質量法がある。どちらの場合も静的剛性マトリックスの誘導と同じく、各変形に対する質量マトリックスを重ね合

Accuracy of Eigenvalues of Three-Dimensional Rigid Frame Structures.

by Toshiro HAYASHIKAWA, Shinya TAKEMURA, Takashi OBATA, and Koichi SATO

わせることで立体骨組部材の質量マトリックスが得られる。

離散座標系における構造物の振動数方程式は、最終的に次のような固有値問題に帰着される。

$$\det | \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} | = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ はそれぞれ境界条件より拘束節点処理された構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 ω は固有円振動数である。式(1)の固有値問題はHouseholder法により解いた。

2-2. 分布座標系

図-1において、 $x-y$ 面内と $x-z$ 面内の各曲げ振動、 x 軸方向の縦振動および x 軸まわりのねじり振動の各自由振動の運動方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E I_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ E I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ -E A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ -G J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{m I_p}{A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで I_y と I_z はそれぞれ y 軸と z 軸まわりの断面2次モーメント、 A は断面積、 m は単位長さあたりの質量、 E は弾性係数、 G はせん断弾性係数、 J はねじり定数、 I_p は断面2次極モーメントである。桁部材の調和振動を仮定し、式(2)の一般解より動的な剛性マトリックスが次のように誘導される¹⁾。

$$\mathbf{K}_{se} = \begin{bmatrix} fF_7 & & & fF_8 & & & & & & \\ & rF_6 & & -rF_4 & rF_5 & & & rF_3 & & \\ & & s\overline{F}_6 & s\overline{F}_4 & & s\overline{F}_5 & & -s\overline{F}_3 & & \\ & & & gF_9 & & & gF_{10} & & & \\ & & s\overline{F}_4 & s\overline{F}_2 & & s\overline{F}_3 & & s\overline{F}_1 & & \\ -rF_4 & & & rF_2 & -rF_3 & & & rF_1 & & \\ fF_8 & & & & fF_7 & & & & & \\ & rF_5 & & -rF_3 & rF_6 & & & rF_4 & & \\ & & s\overline{F}_5 & s\overline{F}_3 & & s\overline{F}_6 & & -s\overline{F}_4 & & \\ & & & gF_{10} & & & gF_9 & & & \\ & & -s\overline{F}_3 & s\overline{F}_1 & & -s\overline{F}_4 & & s\overline{F}_2 & & \\ & rF_3 & & rF_1 & rF_4 & & & rF_2 & & \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、各要素の係数は

$$\begin{aligned} f &= \frac{EA}{L}, & g &= \frac{GJ}{L}, & r &= \frac{EI_z}{L^3}, & s &= \frac{EI_y}{L^3} \\ F_1 &= -\lambda L^2 (\sinh \lambda - \sin \lambda) / \delta & F_8 &= -\lambda^3 (\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) / \delta \\ F_2 &= -\lambda L^2 (\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda) / \delta & F_7 &= \nu \cot \nu \\ F_3 &= -\lambda^2 L (\cosh \lambda - \cos \lambda) / \delta & F_6 &= -\nu / \sin \nu \\ F_4 &= \lambda^2 L (\sinh \lambda \sin \lambda) / \delta & F_9 &= \mu \cot \mu \\ F_5 &= \lambda^3 (\sinh \lambda + \sin \lambda) / \delta & F_{10} &= -\mu / \sin \mu \\ \lambda^4 &= \frac{m \omega^2 L^4}{EI_z}, & \overline{\lambda}^4 &= \frac{m \omega^2 L^4}{EI_y}, & \mu^2 &= \frac{m I_p \omega^2 L^2}{GJA}, & \nu^2 &= \frac{m \omega^2 L^2}{EA} \end{aligned}$$

$\delta = \cosh \lambda \cos \lambda - 1$ である。

最終的に、分布座標系における構造物の振動数方程式は次のように表される。

$$\det | \mathbf{K}(\omega) | = 0$$

(4)

ここで $\mathbf{K}(\omega)$ は拘束節点処理された構造物全体の動的剛性マトリックスである。式(4)は固有円振動数 ω を含む超越方程式となるが、本研究ではRegula-Falsi法を用いて解いた。

3. 数値解析結果

図-2に示すCASE1と、図-3に示すCASE2の立体骨組モデルについて数値計算を行う。CASE1は2部材からなる基本的な立体骨組構造物である。境界条件は2つの支点で固定支持とし、 $A=1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 、 $I_y=5.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ 、 $I_z=2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ 、 $J=1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ 、 $C_w=3.0 \times 10^{-4} \text{ m}^6$ 、 $m=5.0 \times 10^{-3} \text{ t/m}$ である。CASE2は直線連続高架橋であり、上部構造は鋼部材で、 $A=4.55 \times 10^{-1} \text{ m}^2$ 、 $I_y=2.94 \times 10^{-1} \text{ m}^4$ 、 $I_z=2.58 \text{ m}^4$ 、 $J=1.88 \times 10^{-1} \text{ m}^4$ 、 $m=9.30 \text{ t/m}$ 、下部構造はコンクリート部材で、 $A=2.04 \times 10^{-1} \text{ m}^2$ 、 $I_y=1.23 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ 、 $I_z=9.79 \text{ m}^4$ 、 $J=3.22 \times 10^{-1} \text{ m}^4$ 、 $m=5.10 \times 10^{-1} \text{ t/m}$ である。

CASE1で要素分割数 $N=4, 6, 8, 10$ について計算された固有円振動数が表-1に、CASE2で要素分割数 $N=14, 21, 28$ について計算された固有円振動数が表-2に示されている。ここで、連続質量法により計算された固有円振動数は厳密解であり、集中質量法と整合質量法により計算された固有円振動数は近似解である。同じ要素分割数では、集中質量法による固有円振動数は厳密解よりも小さい値を示し、整合質量法による固有円振動数は厳密解よりも大きい値を示している。

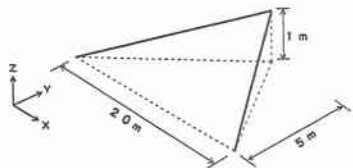


図-2 立体骨組構造 (CASE1)

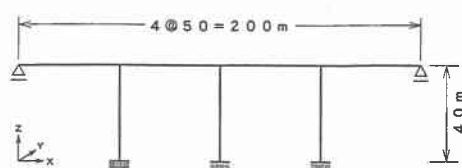


図-3 直線連続高架橋 (CASE2)

表-1 計算された固有円振動数 (CASE1)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous Mass Method
	N = 4	N = 6	N = 8	N = 10	N = 4	N = 6	N = 8	N = 10	
1	48.650 (-8.14)	50.957 (-3.78)	51.817 (-2.16)	52.223 (-1.39)	53.009 (+0.09)	52.970 (+0.02)	52.963 (+0.01)	52.961 (+0.01)	52.957
2	98.830 (-11.01)	105.381 (-5.11)	107.809 (-2.92)	108.959 (-1.89)	112.075 (+0.92)	111.266 (+0.19)	111.118 (+0.06)	111.076 (+0.02)	111.047
3	139.207 (-11.65)	149.328 (-5.22)	152.921 (-2.94)	154.588 (-1.89)	160.046 (+1.58)	158.163 (+0.38)	157.750 (+0.12)	157.633 (+0.05)	157.552
4	156.809 (-11.03)	167.208 (-5.13)	171.072 (-2.93)	172.904 (-1.89)	177.873 (+0.92)	176.584 (+0.19)	176.347 (+0.06)	176.281 (+0.02)	176.234
5	195.492 (-30.66)	230.782 (-18.15)	249.581 (-11.48)	260.019 (-7.77)	285.204 (+1.16)	283.166 (+0.44)	282.362 (+0.15)	282.115 (+0.06)	281.924
6		298.837 (-16.80)	323.171 (-10.02)	335.430 (-6.61)		365.425 (+1.74)	361.380 (+0.62)	360.092 (+0.26)	359.147
7		343.973 (-14.21)	368.347 (-8.13)	379.876 (-5.26)		408.704 (+1.93)	403.888 (+0.73)	402.184 (+0.31)	400.926
8		472.477 (-16.92)	511.115 (-10.13)	530.658 (-6.69)		578.584 (+1.73)	572.120 (+0.62)	570.164 (+0.26)	568.671
9			579.312 (-9.36)	607.206 (-4.99)			648.203 (+1.42)	643.128 (+0.63)	639.082
10			547.981 (-21.24)	580.718 (-16.53)			700.625 (+0.70)	697.969 (+0.32)	695.695
11			599.732 (-19.18)	647.003 (-12.81)			758.249 (+2.18)	749.615 (+1.02)	742.045
12			856.816 (-4.28)	869.463 (-2.87)			901.441 (+0.71)	899.404 (+0.48)	895.070
13			767.094 (-21.68)	833.626 (-14.88)			996.410 (+1.74)	993.513 (+1.44)	979.330
14			910.211 (-19.23)	975.944 (-13.40)			1139.544 (+1.11)	1132.767 (+0.52)	1126.948
15			946.257 (-19.95)	1021.869 (-13.55)			1208.123 (+2.20)	1194.364 (+1.04)	1182.034

Note : N=number of elements; and $(\%) = (\omega - \omega^*) / \omega^* \times 100(\%)$

次に、CASE1とCASE2について

て集中質量法と整合質量法により計算された固有円振動数 ω と、連続質量法により計算された固有円振動数 ω^* との比を各固有振動モードに対して示したものがそれぞれ図-4と図-5である。これより、厳密解に対して集中質量法が下界値を与え、整合質量法が上界値を与えているとともに、整合質量法の方が集中質量法に比べてかなりよい精度で固有円振動数を計算していることがわかる。また、要素分割数Nが多くなるにつれて集中質量法と整合質量法による解が徐々に連続質量法による厳密解に近づいていることが理解できる。

4. あとがき

本研究では、CASE1とCASE2の3次元骨組構造物について集中質量法、整合質量法、連続質量法の3種類の方法で数値計算を行い、その固有値の精度について検討した。

- 1) 同じ要素分割数では、整合質量法の方が集中質量法よりもよい精度で固有円振動数を計算している。
- 2) 集中質量法により計算された固有円振動数は連続質量法により計算された固有円振動数の厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。
- 3) 要素分割数が多くなるにつれて、離散座標系により計算された固有円振動数は徐々に厳密解に近づいていく傾向にある。

今後の研究課題として、曲線高架橋等における曲げねじり剛性 EC_w の影響について検討する予定である。

【参考文献】

- 1) 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析，技報堂出版，pp. 319-342，1993年。
- 2) 林川俊郎：Vレグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について，構造工学論文集，Vol. 35A，pp. 719-725，1989年3月。
- 3) 林川俊郎・佐藤康治・角田與史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度，北海道大学工学研究報告，第148号，pp. 1-15，1989年10月。

表-2 計算された固有円振動数 (CASE2)

Mode order	Lumped Mass Method			Consistent Mass Method			Continuous Mass Method
	N = 14	N = 21	N = 28	N = 14	N = 21	N = 28	
1	4.245 (-5.63)	4.383 (-2.57)	4.433 (-1.46)	4.500 (+0.02)	4.499 (0.00)	4.499 (0.00)	4.499
2	12.042 (-10.03)	12.753 (-4.72)	13.022 (-2.71)	13.488 (+0.77)	13.407 (+0.16)	13.392 (+0.05)	13.385
3	12.054 (-10.32)	12.793 (-4.83)	13.070 (-2.77)	13.548 (+0.78)	13.465 (+0.17)	13.450 (+0.05)	13.442
4	12.579 (-7.95)	13.171 (-3.62)	13.395 (-1.98)	13.706 (+0.30)	13.700 (+0.26)	13.690 (+0.18)	13.665
5	14.487 (-8.83)	15.251 (-4.02)	15.542 (-2.18)	15.950 (+0.38)	15.940 (+0.32)	15.939 (+0.31)	15.889
6	15.356 (-10.61)	16.325 (-4.97)	16.689 (-2.85)	17.369 (+1.10)	17.221 (+0.25)	17.193 (+0.08)	17.179
7	17.197 (-11.50)	18.412 (-5.24)	18.853 (-2.97)	19.697 (+1.37)	19.493 (+0.32)	19.451 (+0.10)	19.430
8	18.171 (-10.75)	19.336 (-5.03)	19.784 (-2.83)	20.415 (+0.27)	20.398 (+0.19)	20.395 (+0.17)	20.360
9	22.104 (-9.84)	23.542 (-3.97)	23.989 (-2.15)	24.826 (+1.26)	24.587 (+0.29)	24.539 (+0.09)	24.517
10	23.405 (-12.54)	25.379 (-5.16)	25.917 (-3.15)	27.135 (+1.40)	26.853 (+0.35)	26.790 (+0.11)	26.760

Note: N=number of elements; and ()=($\omega-\omega^*$)/ $\omega^* \times 100$ (%)

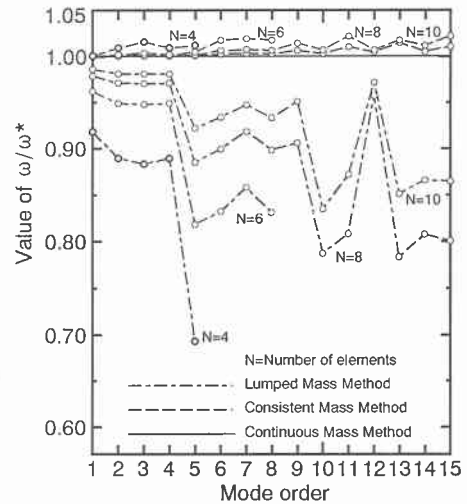


図-4 固有円振動数の精度比較 (CASE1)

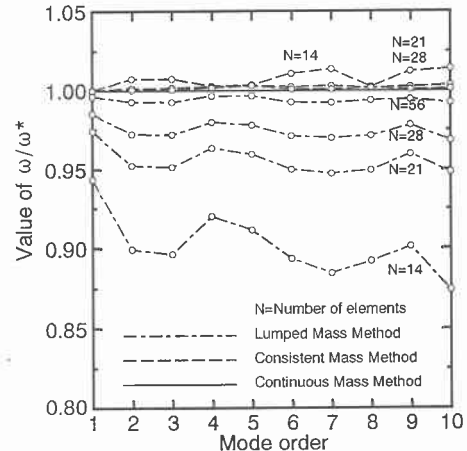


図-5 固有円振動数の精度比較 (CASE2)