

I-24

砂で充たされた振動台上の箱における振動時側壁圧について

苫小牧高専 正員 澤田 知之
 日本大学 正員 能町 純雄
 苫小牧高専 正員 小室 雅人

1. まえがき

地震時など振動時の擁壁、岸壁や斜面に作用する土圧は、その分布、強度が常時とは異なる分布を示すが、計算方法は震度法に根拠を置いた方法で動的な問題を静的に取り扱ったということで、長年にわたる多くの研究¹⁾²⁾等にも拘わらず、まだ不明な点が少なくない。そこで本稿は振動台に載せられた砂箱の中に乾燥砂を詰めて水平振動を与え、振動方向に直角な側壁面に作用する振動圧を平面歪状態での動的二次元弾性解としてフーリエ変換を用いて求めたものを報告するものである。

2. 解析概要

図-1に示す解析モデルより基礎方程式は二次元弾性論より、釣り合い式が次のように示される。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho \ddot{u} = -\rho \ddot{u}_0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho \ddot{v} = -g \rho \quad (2)$$

ここで、 u 、 v は各々、 x 方向、 y 方向の相対変位で、 u_0 は振動台からの入力波動であり

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \ddot{u}_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad \text{である}$$

また $(2G + \lambda)/\rho = C_1^2$ 、 $G/\rho = C_2^2$ であり、 ρ は砂の密度、 C_1 は弾性波の速度、 C_2 はせん断速度となる。またHookeの法則より

$$\sigma_x = \rho C_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho (C_1^2 - 2C_2^2) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3)$$

$$\sigma_y = \rho (C_1^2 - 2C_2^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho C_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \rho C_2^2 \frac{\partial u}{\partial y} + \rho C_2^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

(1)、(2)式をフーリエ定積分変換すると、次の(6)、(7)式のように表される。

$$\int_0^a \int_0^b \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho \ddot{u} = -\rho \ddot{u}_0 \right\} L_1 dy dx \quad (6)$$

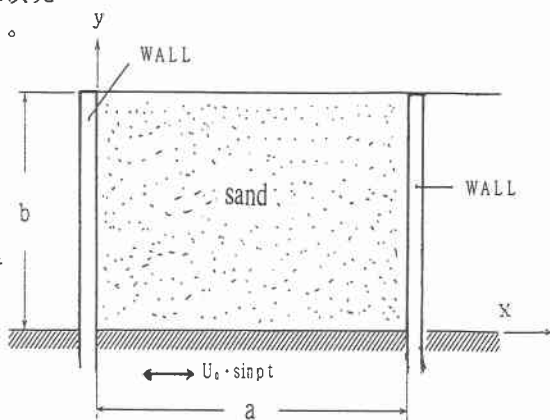


図-1 解析モデル

$$\int_0^b \int_0^a \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho \ddot{v} = -g \rho \right\} L_2 dx dy \quad (7)$$

ここで $L_1 = \sin Mx \sin Ny$, $L_2 = \cos Mx \cos Ny$ であり、 $M = \frac{m\pi}{a}$, $N = \frac{n\pi}{b}$; ($m, n = 1, 2, 3 \dots$)
 (6)、(7) 式を整理すると次のように示される。

$$\begin{aligned} & -C_1^2 \{S_n[u_{xy}](-1)^m - S_n[u_{0y}]\} M - C_2^2 \{S_m[u_{xb}](-1)^n - S_m[u_{x0}]\} N - S_m S_n [u] (C_1^2 M^2 + C_2^2 N^2 + \gamma^2) \\ & + C_m C_n [v] (C_1^2 - C_2^2) M N = \gamma^2 S_m S_n [u_0] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \{C_m[(\sigma_y)_{y=b}](-1)^n - C_m[(\sigma_y)_{y=0}]\} + (C_1^2 - 2C_2^2) N \{S_n[u_{xy}](-1)^m - S_n[u_{0y}]\} + \frac{1}{\rho} \{C_n[(\tau_{xy})_{x=a}](-1)^m - C_n[(\tau_{xy})_{x=0}]\} \\ & + C_2^2 \{S_m[u_{xb}](-1)^n - S_m[u_{x0}]\} M - (C_1^2 N^2 + C_2^2 M^2 + \gamma^2) C_m C_n [v] + (C_1^2 - C_2^2) S_m S_n [u] M N = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $S_m S_n [u] = U_{m,n}$, $C_m C_n [v] = V_{m,n}$ とおくと

$$\frac{C_2^2}{C_1^2} = k, \quad \frac{\gamma^2}{C_1^2} = p^2, \quad F_{m,n} = p^2 S_m S_n [U_0], \quad S_m [U_{x,b}] = A_m, \quad \frac{1}{\rho} C_m [(\sigma_y)_{y=0}] = B_m$$

$x=0, a$ で $\tau_{xy}=0$ また、 $y=b$ で $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$, $y=0$ で $v=0$, $u=0$ であり(10)式のように整理される。

$$\begin{vmatrix} M^2 + k N^2 + p^2 & -(1-k) M N \\ -(1-k) M N & k M^2 + N^2 + p^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_{m,n} \\ V_{m,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{m,n} - k A_m (-1)^n N \\ -B_m + k A_m (-1)^n M \end{Bmatrix} \quad (10)$$

さらに、以下の図-2の境界条件を考慮する。

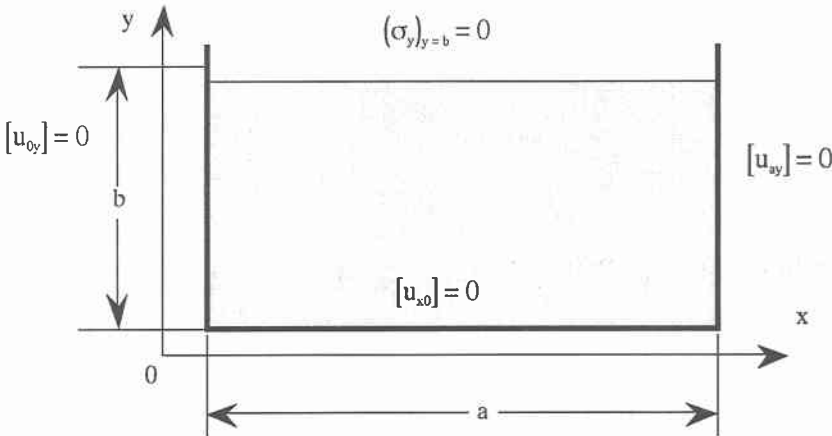


図-2 境界条件

$[u_{0y}], [u_{xy}]$ については、壁面なので変位はない。

$[u_{x0}]$ については、底板と砂が一体となって働くと仮定している。

$(\sigma_y)_{y=b}$ については、上面では応力は働かない。

よって、逆変換を施すことによって平面歪み問題としての解が以下のように求められる。

2-1 水平変位

$$u = \sum_m \frac{\{1 - (-1)^m\}}{2} \sin Mx \left[\frac{4u_0}{b} \frac{be}{m\pi} \{(1 - Q_m(\eta)) \frac{p^2}{\beta_m^2} + (Q'_m(\eta) - Q_m(\eta))\} \sin \omega t \right. \\ \left. - \frac{2hA_m e\pi}{b^2 p^2} \frac{b}{\pi} \{2(me)^2 (R'_m(\eta) - R_m(\eta)) - p'^2 R'_m(\eta)\} + \frac{2\beta_m e}{bp^2} \frac{b}{\pi} (me) \{R_m(1 - \eta) - R'_m(1 - \eta)\} \right] + u_0 \sin(\omega t) \quad (11)$$

2-2 鉛直変位

$$v = \sum_m \frac{\{1 - (-1)^m\}}{2} \cos Mx \left[\frac{4u_0}{b} \frac{be}{\pi} \left(\frac{\varphi'_m(\eta)}{\beta'_m} - \frac{\varphi_m(\eta)}{\beta_m} \right) \right. \\ \left. + \frac{2hA_m e\pi}{b^2 p^2} \frac{b}{\pi} (me) \{2(\beta'_m \varphi'_m(\eta) - \beta_m \varphi_m(\eta)) + \frac{p'^2}{\beta'_m} \varphi'_m(\eta) - \frac{2\beta_m e}{bp^2} \frac{b}{\pi} \{ \frac{(me)}{\beta'_m} \varphi'_m(1 - \eta) - \beta_m \varphi_m(1 - \eta) \} \} \right] \quad (12)$$

2-3 x 方向の応力

$$\frac{\sigma_x}{\rho C_1^2} = \sum_m \frac{\{1 - (-1)^m\}}{2} \cos(Mx) \left[\frac{4u_0}{b} e \{ (1 - Q_m(\eta)) \frac{p^2}{\beta_m^2} + 2h \{ (Q'_m(\eta) - Q_m(\eta)) \} \right. \\ \left. + \frac{2hA_m e\pi}{b^2 p^2} me \{ -4(me)^2 (R'_m(\eta) - R_m(\eta)) + 2p^2 R'_m(\eta) + 2(1 - 2h)p^2 R_m(\eta) \} \right. \\ \left. + \frac{2\beta_m e}{bp^2} \{ 2h(me)^2 \{ R_m(1 - \eta) - R'_m(1 - \eta) \} + p^2 (1 - 2h) R_m(1 - \eta) \} \right] \quad (13)$$

ここで

$$Q_m(\eta) = \frac{\cosh \left\{ \beta_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cosh \left(\frac{\beta_m \pi}{2} \right)} \quad \left(= \frac{\cos \left\{ \beta_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cos \left(\frac{\beta_m \pi}{2} \right)} \right) \quad R_m(\eta) = \frac{\sinh(\beta_m \pi \eta)}{\sinh(\beta_m \pi)} \quad \left(= \frac{\sin(\beta_m \pi \eta)}{\sin(\beta_m \pi)} \right)$$

$$R_m(1 - \eta) = \frac{\sinh \{ \beta_m \pi (1 - \eta) \}}{\sinh(\beta_m \pi)} \quad \left(= \frac{\sin \{ \beta_m \pi (1 - \eta) \}}{\sin(\beta_m \pi)} \right) \quad \varphi_m(\eta) = \frac{\cosh(\beta_m \pi \eta)}{\sinh(\beta_m \pi)} \quad \left(= \frac{\cosh(\beta_m \pi \eta)}{\sinh(\beta_m \pi)} \right)$$

$$\varphi_m(1 - \eta) = \frac{\cos \{ \beta_m \pi (1 - \eta) \}}{\sin(\beta_m \pi)} \quad \left(= \frac{\cos \{ \beta_m \pi (1 - \eta) \}}{\sin(\beta_m \pi)} \right) \quad \psi_m(\eta) = \frac{\sinh \left\{ \beta_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cosh \left(\frac{\beta_m \pi}{2} \right)} \quad \left(= \frac{\sin \left\{ \beta_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cos \left(\frac{\beta_m \pi}{2} \right)} \right)$$

$$Q'_m(\eta) = \frac{\cosh \left\{ \beta'_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cosh \left(\frac{\beta'_m \pi}{2} \right)} \quad \left(= \frac{\cos \left\{ \beta'_m \pi \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \right\}}{\cos \left(\frac{\beta'_m \pi}{2} \right)} \right) \quad R'_m(\eta) = \frac{\sinh(\beta'_m \pi \eta)}{\sinh(\beta'_m \pi)} \quad \left(= \frac{\sin(\beta'_m \pi \eta)}{\sin(\beta'_m \pi)} \right)$$

$$R'_m(1 - \eta) = \frac{\sinh \{ \beta'_m \pi (1 - \eta) \}}{\sinh(\beta'_m \pi)} \quad \left(= \frac{\sin \{ \beta'_m \pi (1 - \eta) \}}{\sin(\beta'_m \pi)} \right) \quad \varphi'_m(\eta) = \frac{\cosh(\beta'_m \pi \eta)}{\sinh(\beta'_m \pi)} \quad \left(= \frac{\cosh(\beta'_m \pi \eta)}{\sinh(\beta'_m \pi)} \right)$$

$$\varphi'_m(1-\eta) = \frac{\cos\{\beta'_m\pi(1-\eta)\}}{\sin(\beta'_m\pi)} \left(= \frac{\cos\{\beta'_m\pi(1-\eta)\}}{\sin(\beta'_m\pi)} \right) \quad \psi'_m(\eta) = \frac{\sinh\left\{\beta'_m\pi\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\right\}}{\cosh\left(\frac{\beta'_m\pi}{2}\right)} \left(= \frac{\sin\left\{\beta'_m\pi\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\right\}}{\cos\left(\frac{\beta'_m\pi}{2}\right)} \right)$$

尚、() 内は虚数。

また、

$$\beta_m^2 = (me)^2 - p^2 \quad \beta'_m{}^2 = (me)^2 - p'^2 \quad p'^2 = \frac{p^2}{h}$$

$$e = \frac{b}{a}, \quad h = \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{G}{2G + \lambda} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

G : せん断弾性係数 ν : ポアソン比

λ : ラーメの定数

3. 壁面に作用する振動時土圧合力

壁面に作用する振動時土圧合力 (P_A) は図-3 に示す常時土圧 (P_{a1}) と振動時土圧 (P_{a2}) との和で表され次のように示される。

$$P_{a1} = \int_0^b \sigma_{x1} dy = \frac{(1-2h)}{2} \rho g b^2 \quad (14)$$

$$P_{a2} = \int_0^b \sigma_{x2} dy = \frac{4\rho g b k}{p'^2 \pi^2} p_{a2}' \quad (15)$$

K : 合震度

$$\therefore P_A = P_{a1} + P_{a2} = \rho g b \left\{ \frac{(1-2h)}{2} b \pm \frac{4k}{p'^2 \pi^2} p_{a2}' \right\} \quad (16)$$

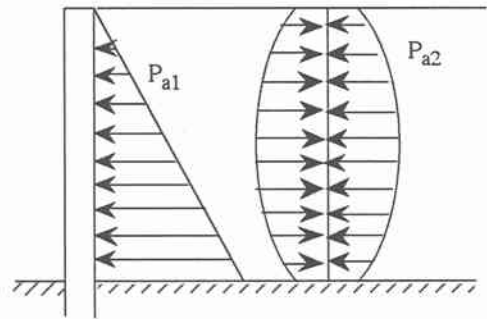


図-3 常時土圧と振動時土圧

ここで

$$p_{a2}' = \sum_m \frac{(1-(-1)^m)}{2} \left[be \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\psi_m(0)}{\beta_m} \right) \frac{p^2}{\beta_m^2} + \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\psi_m'(0)}{\beta_m'} - \frac{\psi_m(0)}{\beta_m} \right) \right\} \right. \\ \left. + X_m \frac{meb}{\pi} \left\{ -4h(me)^2 \left(\frac{\phi_m'(1)}{\beta_m'} - \frac{\phi_m'(0)}{\beta_m'} - \frac{\phi_m(1)}{\beta_m} + \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} \right) + 2p^2 \left(\frac{\phi_m'(1)}{\beta_m'} - \frac{\phi_m'(0)}{\beta_m'} \right) + 2(1-2h)p^2 \left(\frac{\phi_m(1)}{\beta_m} - \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} \right) \right\} \right. \\ \left. + Y_m \frac{b}{\pi} \left\{ 2h(me)^2 \left(\frac{\phi_m(1)}{\beta_m} - \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} - \frac{\phi_m'(1)}{\beta_m'} + \frac{\phi_m'(0)}{\beta_m'} \right) + (1-2h)p^2 \left(\frac{\phi_m(1)}{\beta_m} - \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} \right) \right\} \right]$$

$$\text{また、} \quad X_m = \frac{hA_m e \pi}{2u_0 p^2 b}$$

$$Y_m = \frac{B_m e}{2u_0 p^2 b} \quad \text{である。}$$

4. 振動時土圧合力の作用位置

常時土圧時および振動時土圧時の作用位置 (h_A) は、(17)～(19)式を用いて(20)式のように示される。

$$g_{a1} = \int_0^b \sigma_{a1} y dy = \frac{(1-2h)}{6} \rho g b^3 \quad (17)$$

$$g_{a2} = \int_0^b \sigma_{a2} y dy = \frac{4\rho g b k}{p^2 \pi^2} g_{a2}' \quad (18)$$

$$G_A = g_{a1} + g_{a2} = \rho g b \left\{ \frac{(1-2h)}{6} b^2 \pm \frac{4k}{p^2 \pi^2} g_{a2}' \right\} \quad (19)$$

$$h_A = \frac{G_A}{p_A} = \frac{(1-2h)b^2 p^2 \pi^2 \pm 24k g_{a2}'}{3\{(1-2h)bp^2 \pi^2 \pm 8k g_{a2}'\}} \quad (20)$$

$$g_{a2}' = \sum_m \frac{(1-(-1)^m)}{2} \left[b^2 c \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{\psi_m(0)}{\beta_m} \right) \frac{p^2}{\beta_m^2} + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\psi_m'(0)}{\beta_m'} - \frac{\psi_m(0)}{\beta_m} \right) \right\} \right. \\ \left. + X_m \frac{m e b^2}{\pi} \left\{ -4h(me)^2 \left(\frac{\phi_m'(1)}{\beta_m'} - \frac{1}{\beta_m'^2 \pi} - \frac{\phi_m(1)}{\beta_m} + \frac{1}{\beta_m'^2 \pi} \right) + 2p^2 \left(\frac{\phi_m'(1)}{\beta_m'} - \frac{1}{\beta_m'^2 \pi} \right) + 2(1-2h)p^2 \left(\frac{\phi_m(1)}{\beta_m} - \frac{1}{\beta_m'^2 \pi} \right) \right\} \right. \\ \left. + Y_m \frac{b^2}{\pi} \left\{ 2h(me)^2 \left(\frac{1}{\beta_m^2 \pi} - \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} - \frac{1}{\beta_m'^2 \pi} + \frac{\phi_m'(0)}{\beta_m'} \right) + (1-2h)p^2 \left(\frac{1}{\beta_m \pi} - \frac{\phi_m(0)}{\beta_m} \right) \right\} \right].$$

5. 数値計算結果および考察

いま、 $a=80\text{cm}$ 、 $b=40\text{cm}$ として、松尾・大原の実験値³⁾に合わせて解析した結果を図-4に示す。両者は天端より浅い地点や底部で多少異なるが圧力が大きく表れる中央部分では良好な一致を示している。一般に物部・岡部公式によれば相当大きな土圧力となっており、本解析値の妥当性が示されている。また、振動時の土圧合力および作用位置を表-1に示す。震度が大きくなると振動時土圧の負の圧力が大きくなり、作用位置が大きくずれて計算される。

その他の結果は当日発表の予定である。

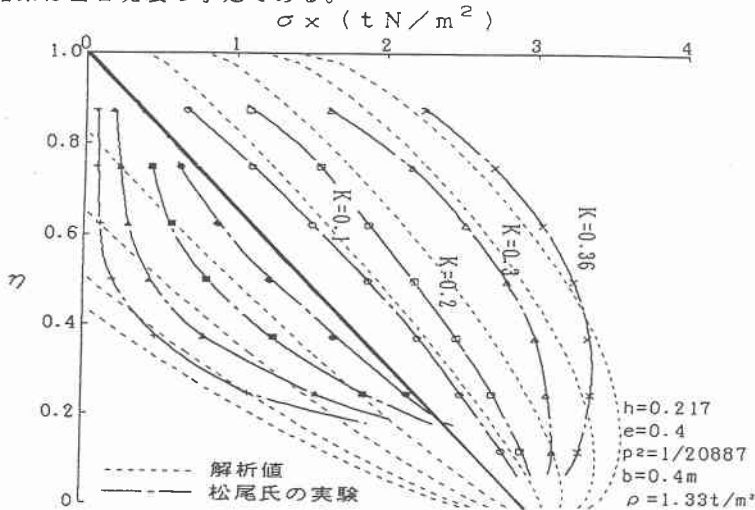


図-4 数値計算結果 (実験値との比較)

表－ 1 振動時土圧合力および作用位置

震度	$P_A = p_{a1} + p_{a2}$			$P_A = p_{a1} - p_{a2}$		
	$P_A \text{ (tN / m}^2\text{)}$	$h_A \text{ (cm)}$	$\eta = \frac{h_A}{b}$	$P_A \text{ (tN / m}^2\text{)}$	$h_A \text{ (cm)}$	$\eta = \frac{h_A}{b}$
0.1	1.900	15.3	0.383	1.053	9.7	0.243
0.2	2.323	16.6	0.415	0.630	1.3	0.033
0.3	2.745	17.5	0.438	0.208	41.4	1.035
0.36	3.000	17.9	0.448	-0.050	-315.0	-7.880

謝辞：本稿作成にあたっては、苫小牧工業高等専門学校土木工学科柳谷豊技官の御協力によるところが大である。ここに記して感謝の意を表する次第である。

付記：本研究は平成6年度文部省特定研究「地震時における地盤の動的挙動に関する研究」の一部として行ったものである。

参考文献

- 1) 物部長穂：地震上下動に関する考察ならびに振動雑論、土木学会誌、Vol.10, No.5, pp.1063-1094, 1924.
- 2) Ichihara, M. AND Matsuzaka, H.: Earth Pressure during Earthquake, Soils and Foundations, Vol.13, No.4, pp.75-86, 1973.
- 3) 大原資生：耐震工学、森北出版社、p85, 1974.