

I-23

拡張カルマンフィルタを用いたトンネル地山の熱定数の予測

北海道大学	学生員	斉藤 知秀
北海道大学	正 員	三上 隆
(株)地崎工業	正 員	須藤 敦史

1. はじめに

地盤や構造物の動特性同定や静的な逆解析において対象システムを非線形状態方程式と観測方程式に分離しシーケンスに同定を行う拡張カルマンフィルタ¹⁾を用いた研究が行われている。

拡張カルマンフィルタを用いたパラメーター同定の特徴は、動的な場合では運動方程式と未知パラメーターを状態ベクトルとして状態方程式に組み込んでおり、静的な逆解析ではシステムの関係式を観測方程式に記述しており、状態ベクトルは未知パラメーターのみとして、その定常性を仮定している点である²⁾⁻⁴⁾。

一方、実際の地盤において地盤定数・熱定数は、空間的に変動する等の不均質性を有するものと考えられており、また物性値試験より得られる値や観測データは観測誤差等のばらつきを含む値である。しかし従来のような解析手法においては空間的不均質性や観測誤差を考慮に入れ、トンネル地山の熱定数を正確に推定することは難しく、信頼性の高い予測解析を行えないのが現状である。そこで拡張カルマンフィルタでは熱定数の空間的不均質性を状態ベクトルのノイズとし、また観測誤差等のばらつきを観測ベクトルのノイズとして、熱定数の不確定性を考慮する定式化を行っている。

本研究では、ベイズ理論により事前分布を更新し事後分布を推定する拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを用いた手法(EK-WIL1法)⁵⁾と1次元の非定常温度解析を行う際に用いる理論式とを組み合わせ、熱定数(熱伝導率、熱容量)を逆解析し、ノイズ(観測誤差)によるパラメーターの同定精度の比較検討を行っている。

2. 拡張カルマンフィルタ

拡張カルマンフィルタは非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本式として構成したものである。

$$dX_t/dt = f(X_t, t) + G_t W_t \quad (1)$$

$$Y_{tk} = h(X_{tk}, t_k) + V_{tk} \quad (2)$$

X_t : 状態ベクトル

Y_{tk} : 観測ベクトル

G_t : 変換行列

W_t : システム雑音ベクトル

V_{tk} : 観測雑音ベクトル

この拡張カルマンフィルタの基本式に対するアルゴリズムは、非線形の状態方程式と観測方程式を基準軌跡のまわりにTaylor展開し線形化し、カルマンフィルタのアルゴリズムに代入して構成されたものである。

式(1)は状態ベクトルの時間的遷移を、式(2)は状態ベクトルと観測ベクトルの関係を示している。また雑音ベクトルは、正規性のホワイトノイズである。

$$E[W_{tk}] = 0, \quad E[W_{tk} W_{ts}^T] = Q_{tk} \delta_{tk s} \quad (3)$$

$$E[V_{tk}] = 0, \quad E[V_{tk} V_{ts}^T] = R_{tk} \delta_{tk s} \quad (4)$$

$\delta_{tk s}$: クロネッカデルタ

Q_{tk}, R_{tk} : システムおよび観測雑音の分散マトリクス

An Identification of Thermal Coefficient of Road Tunnels by Extended Kalman Filter

By Tomohide SAITOH, Takashi MIKAMI and Atsushi SUDO

拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを以下に示す。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\hat{X}(t|t_k), t] dt \quad (5)$$

$$P(t_{k+1}|t_k) = \phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] P(t_k|t_k) \phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] + \Gamma t_k Q t_k^T \Gamma^T t_k \quad (6)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \times [Y t_{k+1} - h\{\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}\}] \quad (7)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\}] \times P(t_{k+1}|t_k) [I - K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\}]^T + K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} R t_{k+1} K^T\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \quad (8)$$

$$K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} = P(t_{k+1}|t_k) M^T\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \times [M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} P(t_{k+1}|t_k) \times M^T\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} + R t_{k+1}]^{-1} \quad (9)$$

ここで

$\hat{X}(t_k t_k)$	: $Y t_k$ が得られたときの t_k 時間における推定状態ベクトル (最適推定値)
$P(t_k t_k)$	: $\hat{X}(t_k t_k)$ と真値 $X t_k$ との差の共分散行列
$\hat{X}(t_{k+1} t_k)$	: $Y t_{k+1}$ が得られたときの t_{k+1} 時間における推定状態ベクトル
$P(t_{k+1} t_k)$	: $\hat{X}(t_{k+1} t_k)$ と真値 $X t_{k+1}$ との差の共分散行列
$K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} t_k)\}$	: t_{k+1} 時間でのフィルタゲイン行列
$Y t_k$	: $\{y t_1, \dots, y t_k\}$
I	: 単位行列

このアルゴリズムは、式 (5) - (6) の予測アルゴリズムと式 (7) - (9) のカルマンゲインによるフィルタリングアルゴリズムより構成される。

アルゴリズム中の変換行列 $M\{t_k; \hat{X}(t_k|t_k)\}$ と $\phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)]$ は、

$$M\{t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1})\} = \left[\frac{\partial h_i(X t_k, t_k)}{\partial X_j} \right]_{X t_k = \hat{X}(t_k|t_{k-1})} \quad (10)$$

$$\phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = I + \Delta F[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \quad (11)$$

$$F\{t_k; \hat{X}(t_k|t_k)\} = \left[\frac{\partial f_i(X t, t)}{\partial X_j} \right]_{X t = \hat{X}(t_k|t_k)} \quad (12)$$

$h_i(X t_k, t_k)$: $h(X t_k, t_k)$ の要素

Δ : 時間刻み

$f_i(X t, t)$: $f(X t, t)$ の要素

X_j : $X t$ または $X t_k$ の要素

式 (5) - (9) のアルゴリズムに初期状態ベクトル $\hat{X}(t_0|t_0)$ と初期推定誤差共分散行列 $P(t_0|t_0)$ が得られれば、観測ベクトル $Y t_k$ を順次取り込みながら漸化的に最適推定値 (最適状態ベクトル) を求めることができる。

3. EK-WLI 法の非定常温度解析への適用⁶⁾

(1) 状態方程式

トンネル地山の熱定数は、不均質性を有し空間的に分布する値である。また物性値試験による値は測定誤差などのばらつきを含む値と考えられる。そこで、空間的に分布する熱定数や測定誤差を評価するため、拡

張カルマンフィルタの状態方程式における状態ベクトルやシステムノイズを空間的なばらつきを有する値や試験誤差と仮定して定式化を行う。

ここで、状態方程式中の状態ベクトルを熱定数とし、かつ測定誤差をシステムノイズ Wt として加えると式(13)のようになる。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = [I] \hat{X}(t_k|t_k) + Wt \quad (13)$$

(2) 観測方程式

拡張カルマンフィルタにおける観測方程式は式(2)で示されるように、観測値は、理論式により得られた温度に観測雑音を加えた値である。

$$Yt = T(x,t) + Vt = h(Xt) + Vt \quad (14)$$

式(14)より観測ベクトル Yt は状態ベクトル Xt の関数となる。ここで式(14)を離散表示すると、式(15)のようになる。

$$Ytk = h(Xtk) + Vtk \quad (15)$$

本研究で対象とする問題は、観測値がある時間において計測され、その計測値より最適状態ベクトルの推定を推定するものである。またEK-WLI法は観測ベクトルに含まれる情報を効率的に抽出するために、得られる観測値において状態ベクトル推定をローカルに繰り返す。したがって、繰り返し計算 t_k は時間には関係なく繰り返し回数となる。

4. EK-WLI 中の変換行列⁶⁾

拡張カルマンフィルタの変換行列は式(12)に示されるように、式(15)を各状態ベクトルで偏微分して得られる。しかし観測ベクトルは状態ベクトルに対して非線形であるため直接偏微分により求めることは困難である。したがって変換行列を影響係数法⁷⁾により近似的に算出する。影響係数法は状態ベクトルを順次微小量変化させ、順解析により求める手法であり式(16)のように表せる。

$$\frac{\partial h_j(Xt_k)}{\partial X_j} = \frac{h_j(X_j t_k + \Delta X_j e_j) - h_j(X_j t_k)}{\Delta X_j} \quad (16)$$

$h_j(X_j)$: $h(X)$ の j 番目の観測点

ΔX_j : X_j の微小要素

e_j : j 番目の要素

これにより、EK-WLI法で未知パラメーターを複雑な偏微分計算を行うことなく求めることができ、有限要素法などの複雑なアルゴリズムを有する場合においても適用が可能となる。

ここで状態ベクトルの推定は初期値 $\hat{X}_0, P_0$ が与えられるとカルマンフィルタのアルゴリズムにより漸化的に行われる。この時に観測ベクトルはある時刻 t_k に得られる観測値を用いて計算を行う。そして、この観測ベクトルにおいてローカルな繰り返しを行い、繰り返し2回目以降に推定誤差共分散行列の重み(W)を乗じ、ローカルな繰り返しをL回行い最適状態ベクトルの推定を行う。

5. 数値解析例

観測値としては、図-1のような1次元モデルの問題の理論解を用いる。解析に用いた諸元、境界条件、初期条件は下記の通りである。

熱定数 ; 熱伝導率 K : 5.0×10^{-6} Kcal/sec $\cdot$ mm $\cdot$ $^{\circ}$ C

熱容量 ρc : 5.0×10^{-7} Kcal/mm³ $\cdot$ $^{\circ}$ C

境界条件；図-1のA端からxの距離にある点のt秒後の温度を $T(x, t)$ で表せば、

$$x=0 \text{ で } T(0, t) = T_1 = 100^\circ\text{C}$$

$$x=1 \text{ で } T(1, t) = 0^\circ\text{C}$$

初期条件； $0 < x < 1$ で $T(x, 0) = 0^\circ\text{C}$

また図-1のような解析モデルに対する、1次元非定常温度解析の理論解は式(17)で示される。

$$T(x, t) = T(x, \infty) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \exp(-n^2\pi^2 F_0) \quad (17)$$

ここで

$$T(x, \infty) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_1 \quad : \text{定常解} \quad (18)$$

$$F_0 = \frac{k t}{\rho c l^2} \quad : \text{Fourier 数 (無次元化した時間)} \quad (19)$$

観測値には、式(17)に基づくノイズがない場合の理論値と、理論値に分散5、20の観測ノイズを加えたものを採用し、その任意点($X=1\text{mm}, 5\text{mm}, 8\text{mm}$)における温度の時間履歴を図-2に示す。

1) パラメータ同定結果

図-2における $t=0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 2.0; 5.0; 10.0$ を着目時間としてパラメータ同定を行う。そして熱伝導率 K の同定結果を図-3に、熱容量 ρc の同定結果を図-4に示し、ノイズが同定値に与える影響を調べる。

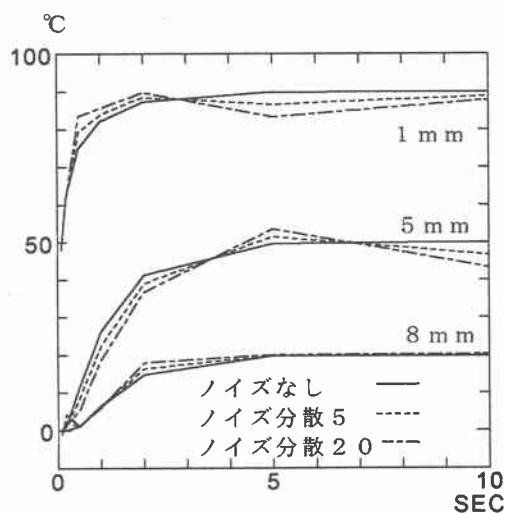


図-2 観測データ

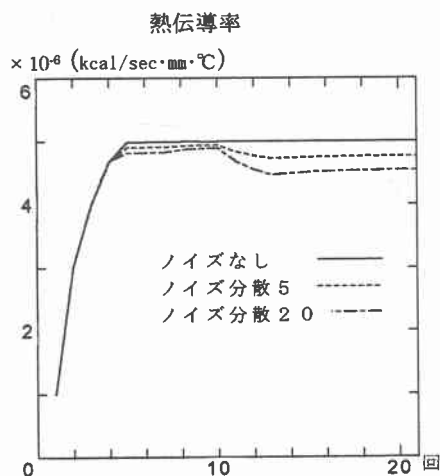


図-3 ノイズによる同定精度の比較

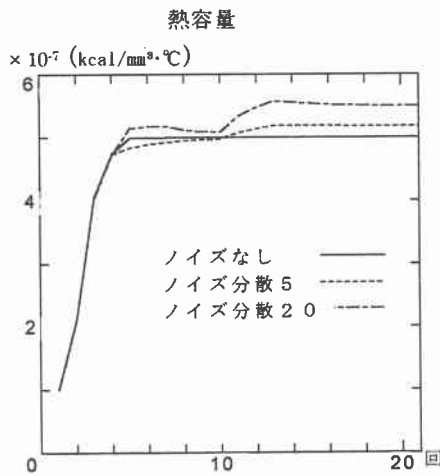


図-4 ノイズによる同定精度の比較

II) 同定値による温度時間履歴

同定値による温度時間履歴を観測ノイズ分散5.0のときは図-5に、観測ノイズ分散20.0のときは図-6に示す。また、同定値を用いた観測の再現値と観測データを図-7に示す。ここで、ノイズを付加しない観測データによる同定値を用いた温度時間履歴は観測データと一致した。

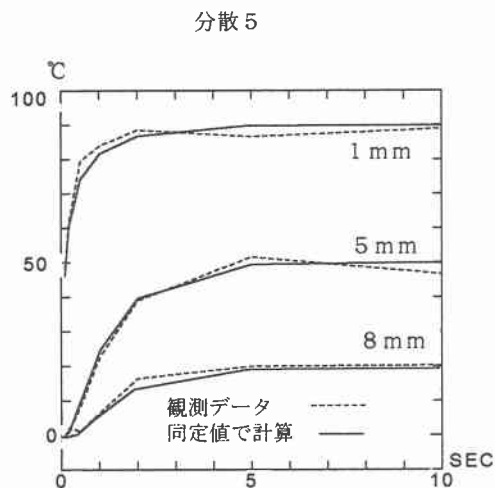


図-5 再現値と観測データの比較

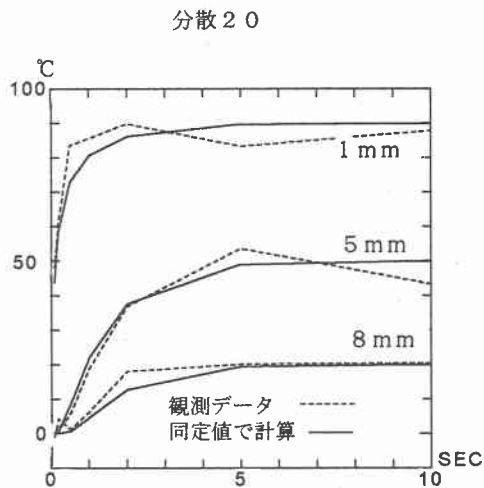


図-6 再現値と観測データの比較

6. 結論

本研究は地山の熱定数を、拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを用いて同定したものである。同定値に及ぼす、観測ノイズの影響を調べた結果、以下のような結論を得た。

ノイズが大きくなればなるほど熱伝導率は真値より小さく同定され、熱容量は大きく同定された。これは観測値が少ないため、観測誤差の平均が0とならないためこのような結果が得られたと思われる。また同定値を用いて計算された温度時間履歴は、ノイズに依らず同じような結果が得られた(図-7)。

このことにより、本手法は観測ノイズの除去が可能となり、トンネル地山の熱定数の予測を拡張カルマンフィルタを用いて行うことができることとなる。

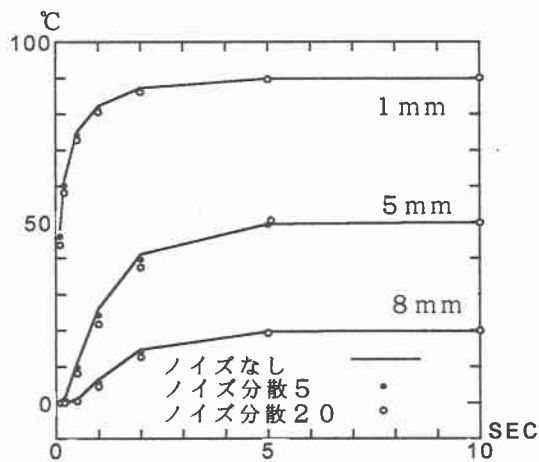


図-7 同定値で計算された温度時間履歴

〈参考文献〉

- 1) Jazwinski, A.H. : Stochastic processes and filtering theory , Academic press , 1970.
- 2) 門田俊一・斉藤悦郎・和久昭正・後藤哲雄；繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の
同定と地下空洞計測管理への適用；
土木学会論文集, No. 406 , pp. 107-116 , 1989
- 3) 村上 章・長谷川高士：Kalman フィルタ有限要素法による逆解析と観測点配置；
土木学会論文集, No. 388 , pp. 227-235 , 1987
- 4) 鈴木 誠・石井 清：拡張カルマンフィルタによる土質定数の空間分布推定；
土木学会論文集, No. 406 , pp. 71-78 , 1989
- 5) 須藤敦史・星谷 勝：拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI法の提案；
土木学会論文集, No. 437 , pp. 203-211 , 1991
- 6) 須藤敦史・星谷 勝：EK-WLI-FEMによるパラメーター同定；
土木学会北海道支部年次技術研究発表会論文報告集第49号, pp. 289-293 , 1993
- 7) W.G-W.Yen , Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology:
The Inverse Problem , Water Resources Research , 22(2) 1986