

I-11

FEMによるTimoshenko梁の衝撃応答解析

北海道大学大学院 学生員 桑 邊 和 幸
北海道大学工学部 正 員 三 上 隆
北海道大学工学部 正 員 佐 伯 昇

1.はじめに

衝撃問題を考えるにあたって衝撃荷重の設定が重要なものとなってくる。しかしながら、その定量的な評価方法はいまだ確立されていない。そこで本研究は衝撃荷重の算定を最終的な目的とするものであり、その第1歩として有限要素(FEM)による梁の衝撃応答解析を行い、その有効性と妥当性の検討を行ったものである。なお、梁の理論には応力波の伝播特性を比較的良好に表すTimoshenko梁理論を用い、運動方程式の積分には陰的解法であるNewmark β 法($\beta=0.25$)を用いた。

2.Timoshenko梁の剛性マトリックスおよび質量マトリックス

梁の要素は鉛直方向のたわみ(w)とたわみ角(θ)によって表すものとする。たわみ(w)については3次、たわみ角(θ)については2次の形状関数を用いることとし、基本的には参考文献[1]の方法で形状関数 $[N_w]$ 、 $[N_\theta]$ 、剛性マトリックス $[K]$ 、質量マトリックス $[M]$ を求めた。しかしながら検算を行った結果、文献の解に間違いのあることがわかったので以下に修正をした解を示す。

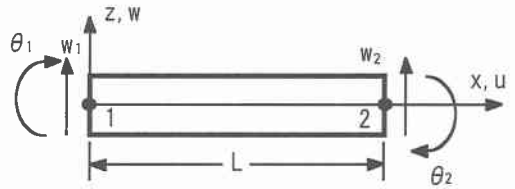


図1 梁要素

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N_w] \\ [N_\theta] \end{Bmatrix} \{\Delta\}$$

$$\{\Delta\}^T = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}$$

w_1 : 点1でのたわみ
 θ_1 : 点1でのたわみ角
 w_2 : 点2でのたわみ
 θ_2 : 点2でのたわみ角

$$[N_w]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi) \right\} \\ -\frac{L}{(1+\phi)} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(2+\frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(1+\frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ -\frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ -\frac{L}{(1+\phi)} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1-\frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \end{bmatrix}$$

$$[N_\theta]^T = \begin{bmatrix} -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi)\left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi) \right\} \\ \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (2-\phi)\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EI}{(1+\phi)L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ (4+\phi)L^2 & 6L & (2-\phi)L^2 & 6L \\ \text{sym.} & & & (4+\phi)L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [M_{\rho A}] + [M_{\rho I}]$$

$$[M_{\rho A}] = \frac{\rho A L}{210(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} (70\phi^2 + 147\phi + 78) & -(35\phi^2 + 77\phi + 44)\frac{L}{4} & (35\phi^2 + 63\phi + 27) & (35\phi^2 + 63\phi + 26)\frac{L}{4} \\ & (7\phi^2 + 14\phi + 8)\frac{L^2}{4} & -(35\phi^2 + 63\phi + 26)\frac{L}{4} & -(7\phi^2 + 14\phi + 6)\frac{L^2}{4} \\ & & (70\phi^2 + 147\phi + 78) & (35\phi^2 + 77\phi + 44)\frac{L}{4} \\ \text{sym.} & & & (7\phi^2 + 14\phi + 8)\frac{L^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$[M_{\rho I}] = \frac{\rho I}{30(1+\phi)^2 L} \begin{bmatrix} 36 & (15\phi - 3)L & -36 & (15\phi - 3)L \\ (10\phi^2 + 5\phi + 4)L^2 & -(15\phi - 3)L & (5\phi^2 - 5\phi - 1)L^2 & \\ & 36 & -(15\phi - 3)L & \\ \text{sym.} & & & (10\phi^2 + 5\phi + 4)L^2 \end{bmatrix}$$

ここで、E=弾性係数、I=断面2次モーメント、A=断面積、L=全長、 ρ =密度、 k =せん断補正係数、 G =せん断弾性係数、 $\phi = \frac{12}{L^2} \left(\frac{EI}{kGA} \right)$ である。

3.固有振動解析

自由振動の場合の固有振動数は以下の式から導くことができる。

$$\det[-\omega^2[M] + [K]] = 0$$

この式から固有振動数を求め、Timoshenko梁理論から求めた厳密解と比較することによって剛性マトリックスと質量マトリックスの妥当性の検討を行った。

まず最初に部材の長さとかさの比(h/L)を変化させた場合の固有振動数について解析値と厳密解の比較、検討を行う。いま両端単純支持梁の自由振動の状態を考え、(h/L)を0.05~1.0まで変化させたときの1次の固有振動数を求め、Timoshenko梁理論の厳密解と比較する。要素は支間全体で4,8,20分割したものをを用いた。結果を図2に示す。部材の高さ h が大きくなっていくと精度が悪くなるが、要素数4の場合で h/L が1のとき1.6%程度、要素数20の場合で h/L が1のとき0.06%しか厳密解と違わないのでかなりよい結果を示している。

次に、表1に6次までの固有振動数について計算値とTimoshenko梁理論から求めた厳密解との比較を示す。表1に示してあるように要素の分割数を増加させると厳密解に近づいていくことがわかる。4要素分割では3次の固有振動数まで、8要素分割では5次要素まで厳密解と10%以内の範囲で解を求めることができ、20要素分割では6次の固有振動数についても、厳密解

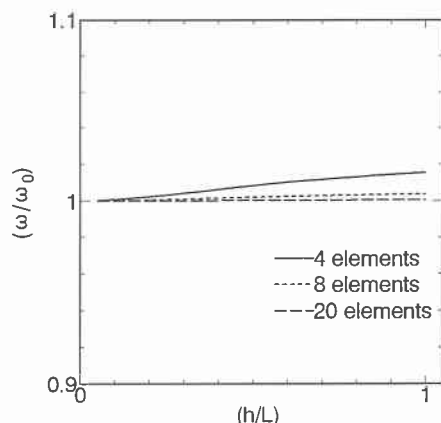


図2 (h/L)の変化による固有振動数の値
(ω_0 :Timoshenko梁理論から求めた正解)

表1 6次モードまでの固有振動数

Mode number	(ω / ω_T)		
	4 elements	8 elements	20 elements
1	1.0015	1.0003	1.0001
2	1.0189	1.0043	1.0007
3	1.0708	1.0169	1.0026
4	1.3813	1.0413	1.0065
5	1.4028	1.0781	1.0125
6	1.5401	1.1232	1.0209

(ω_T :Timoshenko梁理論から求めた正解)

と2%の差しかないのでかなりよい精度で求めることができるといえる。

4.衝撃応答解析

衝撃応答解析を行うにあたって、解析モデルとして図3に示した両端単純支持梁を用い、荷重は支間中央に集中荷重がステップ関数状に作用しているものを用いた。解析モデルの諸元として、 $(h/L)=0.15, (b/h)=0.52$ であり、時間刻み幅(Δt)は 5×10^{-6} である。支点より $x=0.1L$ の点でのたわみ(w)、曲げモーメント(M)、および支点上($x=0$)のせん断力(Q)の解析結果を図4～6に示す。ここで縦軸、横軸とも無次元化されたものであり、横軸を無次元化している c は縦波(c_L)を表している。

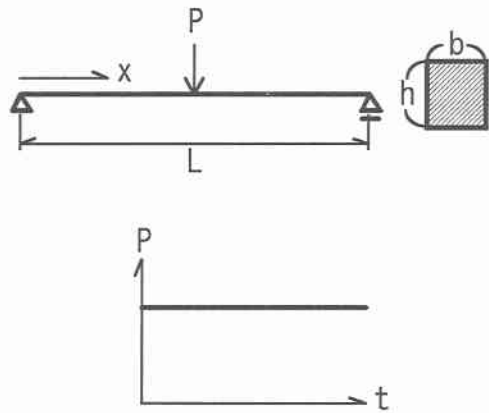


図3 解析モデルおよび荷重モデル

梁の分割数の違いによる収束の状況調べるために対称性を用いて梁の半分で解析を行い、分割数(N)を5,10,20の3タイプの場合を計算し、その影響を調べた。結果を(図4(a),図5(a),図6(a))に示すが、要素分割数(N)が20でほぼ収束値が得られていることがわかる。

また、縦波(c_L)と横波(c_S)の伝播の状況を調べるために、要素分割数(N)が20での初期の応答を、図4(b), 図5(b), 図6(b)に示した。この場合にも対称性を用いて梁の半分で解析を行った。

図中で▽印で示しているのは荷重集中荷点から伝播した縦波の到達時間、▼印で示しているのは横波の到達時間である。図からわかるように、応答は縦波の到達とともに始まるなど応力波の伝播現象をほぼ忠実に表している。

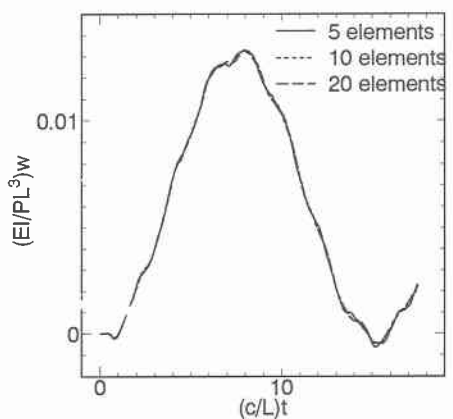


図4(a) 要素分割数による w の収束状況($x=0.1L$)

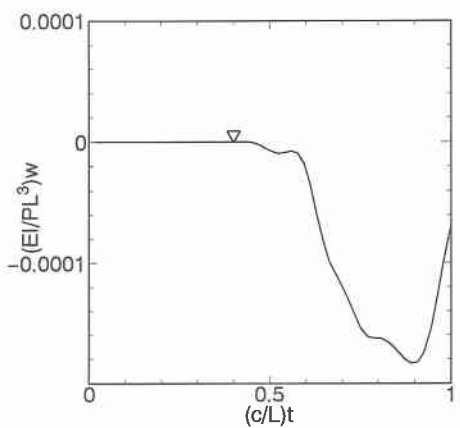


図4(b) 応答初期の w ($x=0.1L, N=20$)

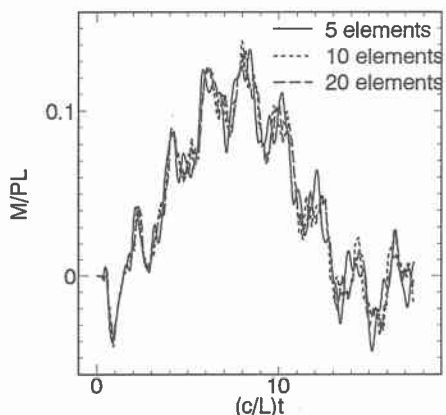


図5(a) 要素分割数による曲げmomentの収束状況 ($x=0.1L$)

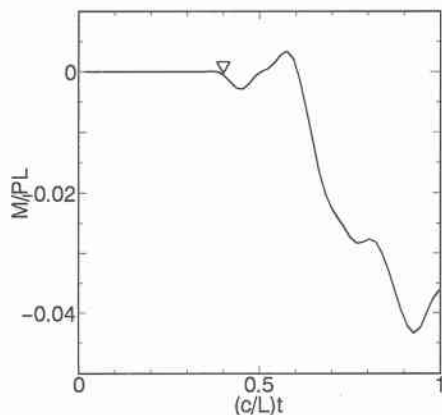


図5(b) 応答初期の曲げmoment($x=0.1L, N=20$)

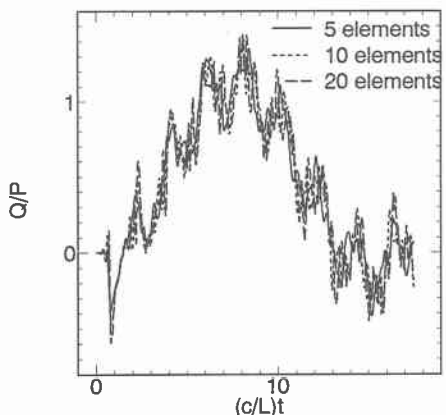


図6(a) 要素分割数によるせん断力の収束状況($x=0$)

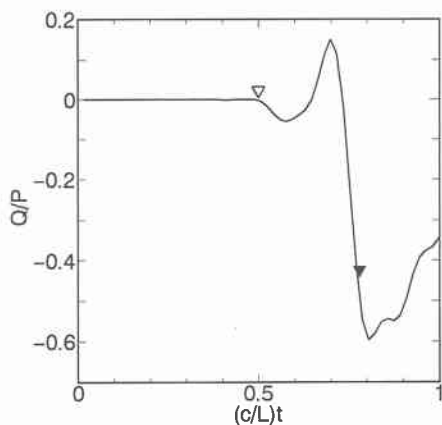


図6(b) 応答初期のせん断力($x=0, N=20$)

5. 結語

本論文ではFEMによる衝撃応答解析を行い、その妥当性を示した。今後ここで用いた解析法とひずみなどの実験データを用いて衝撃荷重の算定を行う予定である。

参考文献 1) Z.Friedman and J.B.Kosmatka : An improved two-node Timoshenko beam finite element, Computers & Structures Vol.47, No.3, pp.473-481, 1993.