

I-10

衝撃荷重を受ける有限円板の応答解析

専修大学北海道短期大学 正員 三上敬司

日本大学生産工学部 正員 能町純雄

1. まえがき

衝撃荷重が作用する板の弾性衝撃解析に関しては、簡単のために Kirchhoff - Love の仮定に基づく古典板理論や回転慣性およびせん断変形を考慮した Mindlin の修正板理論を用いている。しかし、古典板理論における位相速度分散曲線¹⁾は波長が短くなるに従って無限となり、三次元弾性理論の曲げモードのみの厳密解とかなり異なることが知られている。一方、Mindlin の修正板理論では三次元弾性理論の曲げモードと一致していることから、衝撃問題などではこの理論がよく用いられている。例えば、Reismann^{2),3)}は $d/a \geq 0.1$ で周辺固定された軸対称円板やリングの衝撃挙動についてモード解析法(固有関数展開法)を用いて古典板理論と比較検討している。また、Chandrasekaran⁴⁾は $d/a \leq 0.1$ で支持条件が周辺単純支持および固定端における軸対称円板に荷重分布形状や載荷時間などを変化させた場合の衝撃挙動について検討している。著者ら⁵⁾も支持部を補強した場合を想定して(境界条件は鉛直たわみと合モーメントがともに零である)、力積一定とした場合の載荷幅、載荷時間および減衰定数が衝撃荷重を受ける軸対称円板の動的挙動に及ぼす影響について検討している。

しかし、前述した円板の支持条件はあまり一般的ではないことや載荷幅、載荷時間および減衰定数の影響については、文献5)、6)程度であまり多くの研究が成されていないようである。これらのことから、本研究では衝撃荷重を受けた有限円板の動的挙動について検討する。主として、力積を一定とした場合の載荷幅、載荷時間および減衰定数が円板の鉛直方向のたわみ、半径方向の曲げモーメントおよび反力に及ぼす影響について古典板理論と比較しながら検討する。なお、支持条件は周辺単純支持および固定端の2種類とする。

2. 理論解析

分布荷重 $q(r,t)$ が密度 ρ 、ポアソン比 ν 、弾性定数 E 、せん断定数 G 、半径 a 、板厚 d の Mindlin 板理論による有限円板に作用する場合の板のたわみおよび回転角の振動モード、各境界条件における固有振動数を求める。これらを用いてモード解析法より強制振動解析を行ない、衝撃荷重を受ける板の動的挙動について検討する。

2.1. 自由振動モード

図-1に示したように、極座標による軸対称円板の運動方程式は、せん断係数 κ 、たわみ w 、曲げモーメントによるたわみ角 ψ とすると次式のように示される。ただし、曲げ剛性 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$

$$D \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{r \partial r} (r\psi) \right\} - \kappa^2 G d \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \psi \right\} = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\kappa^2 G d \frac{\partial}{r \partial r} \left\{ r \frac{\partial w}{\partial r} \right\} + \kappa^2 G d \frac{\partial}{r \partial r} (r\psi) + q(r,t) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

(1)、(2)式を半径方向についてベッセル変換する。それらの式に $q(r,t)=0$ 、 $w=\bar{w}\sin pt$ 、 $\psi=\bar{\psi}\sin pt$ を代入して円板の自由振動における像空間でのたわみおよび回転角が求まる。さらに、 ξ_i に関してベッセル逆変換してたわみおよび回転角の振動モードを求める。

固有振動数 p_i は、たわみおよび回転角のモードを境界条件(単純支持の場合 $r=a$ で $w_s=0$ 、 $M_r=0$ 、固定端の場合 $r=a$ で $w_s=0$ 、 $\psi_r=0$ である)に適用して求める。

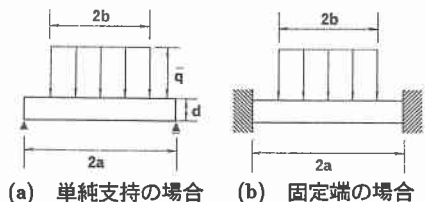
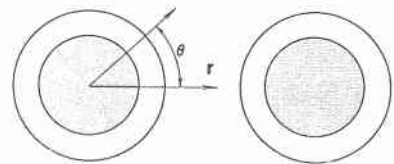


図-1 円板の支持および荷重載荷状態

Response Analysis of Finite Circular Plate under Impulsive Load by Takashi MIKAMI, S. G. NOMACHI

2.2. 強制振動解析

1 自由度系減衰振動する場合の運動方程式は、 C を減衰係数、 $A = \frac{d^2}{12}$ とおくと次式となる。

$$D \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right\} - \kappa^2 G d \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \psi \right\} = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\kappa^2 G d \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial w}{\partial r} \right\} + \kappa^2 G d \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) + q(r, t) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{C}{A} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4)$$

たわみは $w(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) \phi_i(r)$ ，回転角は $\psi(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) \Psi_i(r)$ において (3)，(4)式に代入し自由振動の式を考慮して整理する。さらに、(8)式には Ψ_i を、(9)式には ϕ_i を両辺に掛けて 0 から a まで半径方向について積分すると次式となる。ただし、 Q_i は基準座標である。 $d^2 Q/dt^2 = \ddot{Q}$ ， $dQ/dt = \dot{Q}$ ，荷重強度 $\bar{q}$ とおくことにする。

$$\ddot{Q}_i + 2hp_i \dot{Q}_i + p_i^2 Q_i = \frac{\int_0^a q(r, t) \phi_i(r) r dr}{\rho d N_i^2} \quad \begin{cases} r \leq b & q(r, t) = \bar{q} \\ b < r \leq a & q(r, t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

モード関数の直交性より以下に示す式となる。ただし、 N_i はノルムである。

$$\int_0^a \left[\phi_i(r, t) \phi_j(r, t) + \frac{d^2}{12} \Psi_i(r, t) \Psi_j(r, t) \right] r dr = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ N_i^2 & (i = j) \end{cases}$$

(10)式を時間に関してラプラス変換し、さらにラプラス逆変換すると基準座標は次式となる。

$$Q_i(t) = \frac{\bar{q}}{\rho d N_i^2 p_i \sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-hp_i(t-\tau)} \sin p_i \sqrt{1-h^2} (t-\tau) d\tau \int_0^b \phi_i(r) r dr \quad (6)$$

鉛直方向のたわみは次式となる。

$$w(r, t) = \frac{1}{\rho d \sqrt{1-h^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2 p_i} I_i(t) I_b \phi_i(r) \quad (7)$$

曲げモーメントは次式となる。

$$M_r(r, t) = \frac{D}{\rho d \sqrt{1-h^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2 p_i} I_i(t) I_b M_\psi(r) \quad (8)$$

せん断力は次式となる。

$$Q_r(r, t) = \frac{-\kappa^2 G}{\rho \sqrt{1-h^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2 p_i} I_i(t) I_b Q_\psi(r) \quad (9)$$

ただし、曲げモーメント振動モード： $M_\psi(r)$ ，せん断力振動モード： $Q_\psi(r)$ ，一般化外力： I_b

$$I_i(t) = \int_0^t \bar{q} e^{-hp_i(t-\tau)} \sin p_i \sqrt{1-h^2} (t-\tau) d\tau$$

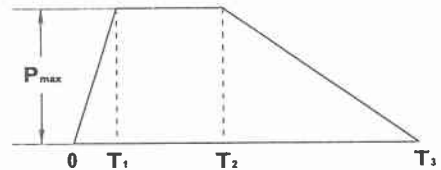


図-2 時間方向の台形荷重分布

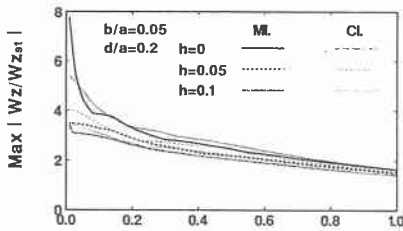
3. 数値計算例

数値計算における円板の物性値はポアソン比 $\nu=1/6$ とし、せん断係数 $\kappa^2=0.86$ ，板厚比 $d/a=0.2$ と仮定する。減衰定数，載荷時間および載荷幅が，Mindlin の修正板理論による円板の鉛直方向のたわみ，半径方向の曲げモーメント，反力（せん断力）に及ぼす影響について古典板理論と比較しながら検討する。時間 T は $a\sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ で割って無次元化する。時間方向の荷重分布は、図-2 に示したように台形荷重分布としてその載荷時間の比を $T_1:T_2:T_3 = 1:2:10$ と仮定する。(7)～(9)式より、鉛直方向のたわみ，半径方向の曲げモーメントについては、荷重 $P_0=10tf$ とした場合の中央点における静的なたわみ，曲げモーメントで、せん断力または反力については入力荷重 $P_{\max}$

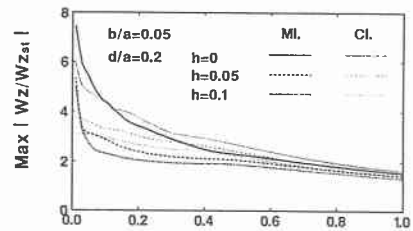
で割ってそれぞれ無次元化する．本研究では，荷重 $P_{\max}=10\text{tf}$ ，無次元第一次固有周期（単純支持の場合 $T_T=23.63$ ，固定端の場合 $T_T=11.59$ ）を無次元載荷継続時間 T_3 として力積を求め，それが一定であると仮定する．なお，本論における無次元固有振動数は，両理論とも文献4）に記載されている $d/a=0.02, 0.04$ での1～20次までの単純支持および固定端の無次元固有振動数と一致した．また，固有モード項数は，鉛直方向のたわみでは80個，半径方向の曲げモーメントでは120個，反力（せん断力）では200個でほぼ収斂していることを確認している．

3.1. 無次元載荷継続時間および減衰定数の影響

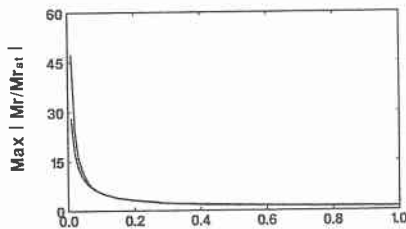
図－3，4は，無次元載荷幅 $b/a=0.05$ ，減衰定数 $h=0, 0.05, 0.1$ として円板の中央点におけるたわみ，曲げモーメントおよび支点反力の最大応答倍率を示している．なお，支持条件は周辺単純支持および固定端の2種類である．横軸は無次元載荷継続時間 T_3 を無次元固有周期 T_T で割ったものである．図（a）の最大応答倍率は， $h=0$ の場合では無次元載荷継続時間が長くなるにつれて急激に減少し $T_3/T_T=0.08$ で変曲点が現われその後再び緩やかに減少している．それに反して， $h=0.05, 0.1$ の場合では無次元載荷継続時間が長くなるにつれて緩やかに減少していることがわかる．図（b）の最大応答倍率は，いずれの減衰定数でも無次元載荷継続時間 $T_3/T_T=0.01$ で最大値を示し，無次元載荷継続時間が長くなるにつれて双曲線的に減少していることがわかる．減衰定数に関しては前述したたわみの場合と同様である．図（c）の最大応答倍率は，減衰定数 $h=0$ の場合では $T_3/T_T=0.32$ 以下で無次元載荷継続時間の影響を受けているために変化が大きく，0.32以上の場合では約2.7倍に収斂している． $h=0.05, 0.1$ の場合では $h=0$ の場合と異なり $T_3/T_T=0.32$ 以下でほぼ一定値を示し，0.32以上の場合では約2.0倍に収斂している．このことより，



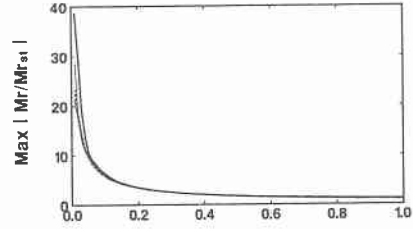
(a) たわみの場合



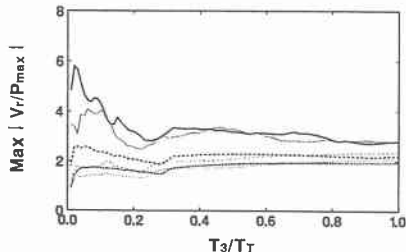
(a) たわみの場合



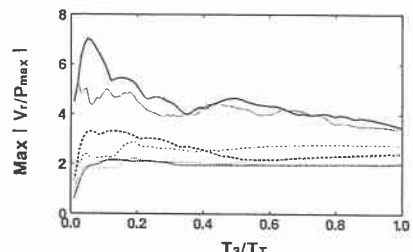
(b) 曲げモーメントの場合



(b) 曲げモーメントの場合



(c) 支点反力の場合



(c) 支点反力の場合

図－3 無次元載荷継続時間と最大応答倍率の関係（単純支持の場合）

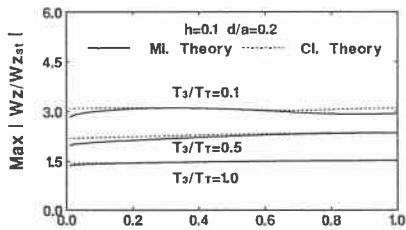
図－4 無次元載荷継続時間と最大応答倍率の関係（固定端の場合）

反力は一般的に言われている入力荷重に対して必ずしも2倍になるとは言えないことがわかる。両理論を比較するといずれの場合も無次元載荷継続時間が短いところでは若干異なった応答倍率となっているが無次元載荷継続時間が長くなるとほぼ等しい応答倍率を示していることがわかる。

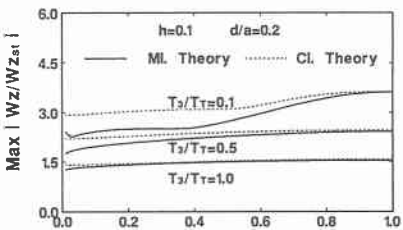
図一4 (a) ~ (c) は、固定端の場合の円板における各最大応答倍率である。いずれの場合の応答倍率も無次元載荷継続時間に関して前述した単純支持の場合とほぼ同様な傾向を示している。両理論を比較するといずれの場合も単純支持の場合に比べて無次元載荷継続時間に依存せずそれほど一致していないようである。

3.2. 無次元載荷幅の影響

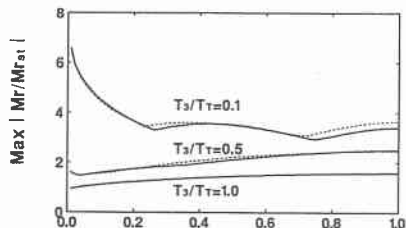
減衰定数は、文献5) より $h=0.05 \sim 0.1$ ぐらいの値を推定していることから、本論では減衰定数を $h=0.1$ と仮定する。図一5, 6 は、無次元載荷継続時間 $T_3/T_T=0.1, 0.5, 1.0$ における無次元載荷幅 b/a に対する各円板のたわみ、半径方向の曲げモーメント、支点反力の最大値を示している。なお、実線は Mindlin 修正板理論、点線は古典板理論である。図 (a) のたわみにおける最大応答倍率では、無次元載荷幅の変化にかかわらずほぼ一定値を示しているものの無次元載荷継続時間が長くなると徐々に減少している。図 (b) の曲げモーメントにおける最大応答倍率では、たわみにおける応答倍率と同様に無次元載荷幅によらず無次元載荷継続時間が小さいほど大きくなっていることがわかる。 $T_3/T_T=0.5, 1.0$ の場合では、無次元載荷幅が広がるにつれて緩やかな増加傾向を示している。しかし、 $T_3/T_T=0.1$ の場合では $b/a=0.26$ まで非線形的に減少し、 $b/a=0.26 \sim 0.74$ の場合では上に凸の曲率をもつ曲線となり、 $b/a=0.74$ 以上では緩やかに増加していることがわかる。このことは、無次元載荷継続時間が短くかつ無次元



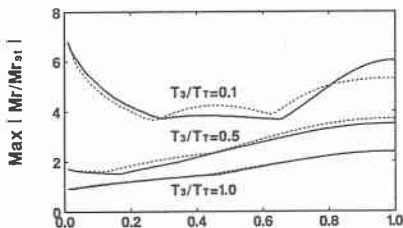
(a) たわみの場合



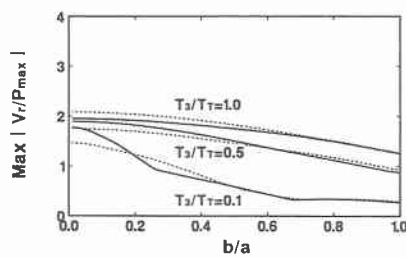
(a) たわみの場合



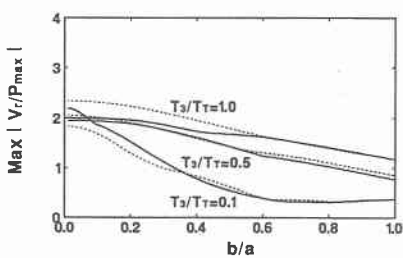
(b) 曲げモーメントの場合



(b) 曲げモーメントの場合



(c) 支点反力の場合



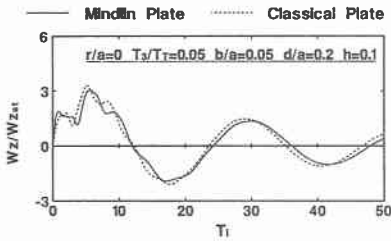
(c) 支点反力の場合

図一5 無次元載荷幅と最大応答倍率の関係 (単純支持の場合)

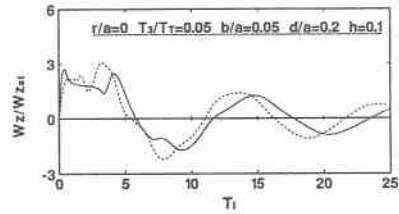
図一6 無次元載荷幅と最大応答倍率の関係 (固定端の場合)

載荷幅が小さいために大きな振幅をもつ最低次固有振動が励起されず、荷重載荷初期の応答が荷重除荷後の低次振動の合成波よりも大きくなったためと考えられる。両理論を比較すると、 $T_3/T_T=0.5, 1.0$ の場合ではほとんど差が見られないものの、古典板理論の $T_3/T_T=0.1$ の場合では $b/a=0.23$ と 0.72 で変曲点が見られ前述した Mindlin 板理論の場合と若干異なっている。図 (c) の反力における最大応答倍率では前述の場合と異なり無次元載荷継続時間が長くなるにつれて大きな値を示している。また、 $T_3/T_T=0.5, 1.0$ の場合では無次元載荷幅が大きくなるに従って非線形的に緩やかな減少傾向を示している。一方、 $T_3/T_T=0.1$ の場合では $b/a=0.23$ と 0.72 で変曲点が見われている。両理論を比較すると、 $b/a=0.5$ 以下で無次元載荷継続時間にかかわらず僅かながら差が見られる。

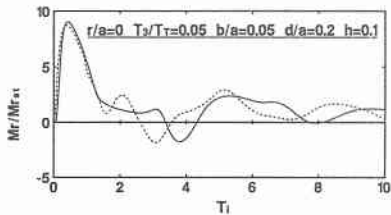
図一6 (a) ~ (c) は、固定端における円板の各最大応答倍率である。図 (a) での最大応答倍率は、 $T_3/T_T=0.5$ の場合では単純支持の場合と同様に無次元載荷幅の変化にかかわらずほとんど一定値に収斂している。しかし、 $T_3/T_T=0.1$ の場合では $b/a=0.4$ ぐらいまでほぼ一定値を示しているが 0.4 以上の場合は緩やかに増加していることがわかる。図 (b) では、中央点かまたは固定端のいずれかで最大値が現われるものの単純支持の場合と同様な傾向を示している。 $T_3/T_T=0.1$ の場合の最大応答倍率は $b/a=0.29 \sim 0.65$ 区間では中央点で、それ以外の区間では固定端位置で現われている。 $T_3/T_T=0.5, 1.0$ の場合では $b/a=0.46$ まで中央点でそれ以上では固定端位置で現われている。図 (c) の反力における最大応答倍率は、単純支持の場合とほぼ同様な傾向となっている。一方、両理論を比較すると、 $T_3/T_T=0.1$ の場合におけるたわみの最大応答倍率は無次元載荷幅が小さいほど両理論の差が徐々に広がっているが、これは両理論における静的なたわみと高次モードの影響による差がそのまま現われていると思われる。



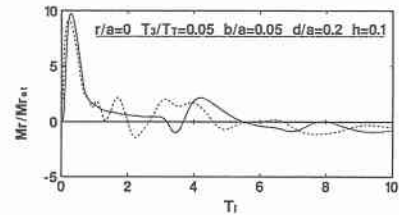
(a) 中央点におけるたわみの場合



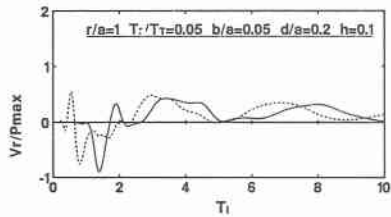
(a) 中央点におけるたわみの場合



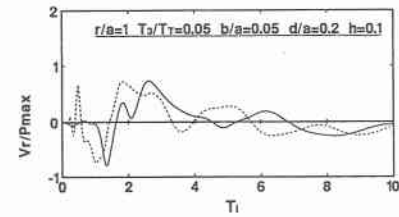
(b) 中央点における曲げモーメントの場合



(b) 中央点における曲げモーメントの場合



(c) 支点反力の場合



(c) 支点反力の場合

図一7 時刻歴応答 (単純支持の場合)

図一8 時刻歴応答 (固定端の場合)

反力の最大応答倍率は、 $T_3/T_T=1.0$ の場合ではそれぞれ $b/a=0.6$ 以下で無次元載荷幅が小さくなるにつれて両理論の差が徐々に広がっていることがわかる。このことは古典板理論に比べて Mindlin 板理論の方が無次元載荷幅が小さくなくても高次モードが励起されないためと思われる。

3.3. 時刻歴応答分布

図一 7 (a) ~ (c) は周辺単純支持された円板の中央点におけるたわみ、曲げモーメントおよび支点反力の時刻歴応答を示している。なお、横軸は無次元時間 T_i であり、無次元載荷幅 $b/a=0.05$ 、無次元載荷継続時間 $T_3/T_T=0.05$ と仮定した。図 (a) におけるたわみの主波動は、両理論ともに 1 次モードに 3 次モードが重なっている波形を示しほぼ酷似している。その後は減衰自由振動に移行し、その周期は Mindlin 板理論では円板の無次元最低次固有周期 $T_T=23.63$ 、古典板理論では $T_T=23.01$ にほぼ等しい値を示している。図 (b) の主波動では、両理論を比較すると最大応答倍率はほぼ等しくほぼ同時に最大値に達した後減衰し、両理論とも時間的にはずれているものの極値が再び発生していることがわかる。これは境界における反射の影響と思われる、Mindlin 板理論の波動ではせん断波で伝播し古典板理論で発生した波動より遅れて伝播していると思われる。図 (c) の Mindlin 板理論での反力は、第 1 波が負の反力として発生してから正の反力に移行しているが古典板理論ではそれほど明確に示されていない。

図一 8 (a) ~ (c) は周辺固定端された円板の中央点におけるたわみ、曲げモーメントおよび支点反力の時刻歴応答を示している。図 (a) のたわみの主波動は、単純支持の場合と比較してその波形が異なるものの同様な挙動を示している。また周期は Mindlin 板理論では円板の最低次固有周期 $T_T=11.59$ 、古典板理論では $T_T=10.65$ にほぼ等しい値を示している。一方、図 (b) および (c) は、単純支持の場合とほぼ等しい傾向を示している。しかし、図 (b) における曲げ波動は正から負に移行していることから固定端で発生した反射の影響であるものと思われる。

4. あとがき

本研究では、衝撃荷重を受けた有限円板が力積一定とした場合の載荷幅、載荷時間および減衰定数が動的挙動に及ぼす影響について Mindlin 修正板理論と古典板理論とを比較しながら検討した。なお、境界条件は周辺単純支持および固定端の二通りとし、ポアソン比 $\nu=1/6$ 、 $d/a=0.2$ とした。本研究における数値計算結果をまとめると

- 1) 無次元載荷継続時間および減衰定数の影響については、減衰効果がない場合の最大応答倍率では無次元載荷継続時間が短いところで高次モードの影響を受けているが、減衰定数 $h=0.05, 0.1$ の場合ではその影響をあまり受けていないことがわかった。また支点反力では、無次元載荷継続時間に依存せずに必ずしも入力荷重の 2 倍とならないことがわかった。一方、両理論を比較すると単純支持の場合ではそれほど顕著な応答差が見られなかったが、固定端の場合では高次モードがそれ程励起されないために両理論の応答差が見られることがわかった。
- 2) 無次元載荷幅の影響については、両理論を比較すると単純支持の場合より固定端の方が無次元載荷継続時間が短いところで大きく受けていることがわかった。特に、たわみおよび曲げモーメントの場合では $T_3/T_T=0.1$ である。また曲げモーメントでは最大応答倍率が中央点かまたは固定端のいずれかで生じることがわかった。
- 3) 時刻歴応答については、両理論を比較すると無次元固有周期、波動伝播および境界条件によって応答が異なることを示した。

今後は載荷幅や載荷継続時間が波動伝播に及ぼす影響についても検討する予定である。本論文の作成にあたり、大阪市立大学工学部土木工学科小林治俊先生に資料の提供およびご助言を頂いたことに感謝の意をここに表します。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編：構造物と衝撃挙動設計法，pp.1 ~ 33，1993年 12月。
- 2) H.Reisann：Forced Motion of Elastic Plates，Journal of Applied Mechanics，pp.510 ~ 515，Sept.，1968。
- 3) H.Reismann：Elastic Plates - Theory and Application，John Wiley & Sons，pp.151 ~ 181，1988。
- 4) K.Chandrasekaran，V.X.Kunukkasseril：Forced Axisymmetric Response of Circular Plates，Journal of Sound and Vibration，Vol.44，No.3，pp.407 ~ 417。
- 5) 三上敬司，金子孝吉：有限円板の弾性衝撃応答解析，専修大学北海道短期大学紀要，第 26 号，pp.69 ~ 79，1993。
- 6) 菅田紀之：RC 覆工の耐衝撃設計に関する研究，室蘭工業大学学位論文，1994年 9月。