

I-7 部分加熱を受ける直方柱の非定常熱伝導

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

熱伝導の問題は、本来は、物理学或いは応用数学の分野で取り扱われる課題である。然しながら、この問題は、工学の中でも、重要な一専門を成す熱応力の問題に対して、避けて通ることのできない課題である。工学を専門とする研究者にとって、熱応力の解析対象となる固体の熱伝導が既に解析されていることは、大きな福音となるが、Carslaw 及び Jaeger¹⁾、川下²⁾ 或いは小平³⁾ の書物を見ても、複雑な境界条件を持つ3次元固体の非定常熱伝導は、必ずしも、具体的に述べられていない。直方柱或いは直六面体の熱伝導は、前述の小平の書物に定常状態の解析を見るが、加熱と熱放散の境界条件を持つ非定常状態の解析は、見当たらない様である。

本論文は、直方柱の非定常熱応力の解析に必要な熱伝導の解析について述べるものである。境界条件は、直方柱の両端面で部分加熱及び他の4つの側面で熱放散が取り扱われている。数値計算においては、立方柱及び矩形柱の温度分布が、フーリエ数をパラメーターとして、求められている。

2. 熱伝導の方程式及びその解

等方性体の非定常熱伝導の方程式は、次の様なものである。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 T 、 t 、 κ 及び ∇^2 は、それぞれ、温度、時刻、温度伝導率及び直交座標 (x, y, z) における Laplace の演算子を表す。直方柱の座標系を図-1の様に定め、温度場が x 、 y 及び z に関して偶であることに留意して、式(1)を変数分離の方法で解くと、解は、次の様に求められる。

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \bar{\gamma}_l z \cos \bar{\beta}_n y (A_{ln}^* \cosh \bar{l}_{ln} x) \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \bar{\gamma}_l z \cos \bar{\alpha}_m x (B_{lm}^* \cosh \bar{m}_{lm} y) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y (C_{mn}^* \cosh \bar{n}_{mn} z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{mnl} \cos \bar{\alpha}_m x \\ & \cdot \cos \bar{\beta}_n y \cos \bar{\gamma}_l z \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2)t] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{l}_{ln} = \sqrt{\bar{\gamma}_l^2 + \bar{\beta}_n^2}, \quad \bar{m}_{lm} = \sqrt{\bar{\gamma}_l^2 + \bar{\alpha}_m^2}, \quad \bar{n}_{mn} = \sqrt{\bar{\alpha}_m^2 + \bar{\beta}_n^2} \dots\dots\dots (3a-c)$$

また、 A_{ln}^* 、 $\dots$ 、 D_{mnl} は、境界条件及び初期条件から定められる未定定数であり、 $\bar{\gamma}_l$ 、 $\bar{\beta}_n$ 及び $\bar{\alpha}_m$ は、それぞれ、後述する超越方程式の第 l 番目、第 n 番目及び第 m 番目の正根である。

3. 境界条件、初期条件及び解

図-1に示した様に、直方柱の両端面が部分加熱を受け、4つの側面が熱放散のある場合を考えると、境界条件は、次式となる。

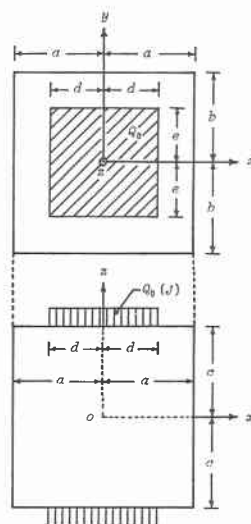


Fig.1 Coordinate system of rectangular prism.

A Transient Heat Conduction of a Rectangular Prism Due to Partial Heat Supplies

By Isamu A. OKUMURA

$$x=\pm a \text{ において、 } \frac{\partial T}{\partial x} \pm hT=0 \dots\dots\dots(4a)$$

$$y=\pm b \text{ において、 } \frac{\partial T}{\partial y} \pm hT=0 \dots\dots\dots(4b)$$

$$z=\pm c \text{ において、 } \frac{\partial T}{\partial z} \pm hT=\pm \frac{Q(x,y)}{\lambda} \dots\dots\dots(4c)$$

ここで、 h 及び λ は、それぞれ、相対熱伝達率及び熱伝導率を表す。また、 $Q(x,y)$ は、両端面に課せられた部分加熱であり、次式で表される。

$$Q(x,y)=\begin{cases} Q_0 & [-d < x < d \text{ かつ } -e < y < e] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 Q_0 は、基準熱 (J) を表す。

初期条件として、次式を考える。

$$t=0 \text{ において、 } T=0 \dots\dots\dots(6)$$

式 (2) の T に境界条件 (4a) を課すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ln}^* \cos \bar{\gamma}_l z \cos \bar{\beta}_n y (\bar{l}_{ln} \sinh \bar{l}_{ln} a + h \cosh \bar{l}_{ln} a) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{lm}^* \cos \bar{\gamma}_l z \cosh \bar{m}_{lm} y (-\bar{\alpha}_m \sin \bar{\alpha}_m a + h \cos \bar{\alpha}_m a) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^* \cos \bar{\beta}_n y \cosh \bar{n}_{mn} z (-\bar{\alpha}_m \sin \bar{\alpha}_m a + h \cos \bar{\alpha}_m a) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{mnl} \cos \bar{\beta}_n y \cos \bar{\gamma}_l z \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2)t] \\ & \cdot (-\bar{\alpha}_m \sin \bar{\alpha}_m a + h \cos \bar{\alpha}_m a) = 0 \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

上式が成立するためには、次の関係が必要となる。

$$A_{ln}^* = 0, \quad -\bar{\alpha}_m \sin \bar{\alpha}_m a + h \cos \bar{\alpha}_m a = 0, \quad \text{即ち、} \bar{\alpha}_m a \sin \bar{\alpha}_m a - ah \cos \bar{\alpha}_m a = 0 \dots\dots\dots(8a-c)$$

式 (2) の T に境界条件 (4b) を課すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ln}^* \cos \bar{\gamma}_l z \cosh \bar{l}_{ln} x (-\bar{\beta}_n \sin \bar{\beta}_n b + h \cos \bar{\beta}_n b) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{lm}^* \cos \bar{\gamma}_l z \cos \bar{\alpha}_m x (\bar{m}_{lm} \sinh \bar{m}_{lm} b + h \cosh \bar{m}_{lm} b) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^* \cos \bar{\alpha}_m x \cosh \bar{n}_{mn} z (-\bar{\beta}_n \sin \bar{\beta}_n b + h \cos \bar{\beta}_n b) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{mnl} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\gamma}_l z \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2)t] \\ & \cdot (-\bar{\beta}_n \sin \bar{\beta}_n b + h \cos \bar{\beta}_n b) = 0 \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

上式が成立するためには、次の関係が必要となる。

$$B_{lm}^* = 0, \quad -\bar{\beta}_n \sin \bar{\beta}_n b + h \cos \bar{\beta}_n b = 0, \quad \text{即ち、} \bar{\beta}_n b \sin \bar{\beta}_n b - bh \cos \bar{\beta}_n b = 0 \dots\dots\dots(10a-c)$$

式 (8a) 及び式 (10a) の既知定数を式 (2) の T に代入し、それに境界条件 (4c) を課すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^* \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y (\bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c + h \cosh \bar{n}_{mn} c) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{mnl} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2)t] \\ & \cdot (-\bar{\gamma}_l \sin \bar{\gamma}_l c + h \cos \bar{\gamma}_l c) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_{mn} &= \frac{\int_{-a}^a \int_{-b}^b Q(x,y) \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y dx dy}{\int_{-a}^a \cos^2 \bar{\alpha}_m x dx \cdot \int_{-b}^b \cos^2 \bar{\beta}_n y dy} \\ &= 4Q_0 \frac{\sin \bar{\alpha}_m d \sin \bar{\beta}_n e}{\cos \bar{\alpha}_m a \cos \bar{\beta}_n b} \frac{1}{[(1+ah) \sin \bar{\alpha}_m a + \bar{\alpha}_m a \cos \bar{\alpha}_m a]} \frac{1}{[(1+bh) \sin \bar{\beta}_n b + \bar{\beta}_n b \cos \bar{\beta}_n b]} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

式 (11) が成立するためには、次の関係が必要となる。

$$C_{mn}^* = \frac{f_{mn}}{\lambda} \frac{1}{\bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c + h \cosh \bar{n}_{mn} c} \dots\dots\dots (13a)$$

$$-\bar{\gamma}_l \sin \bar{\gamma}_l c + h \cos \bar{\gamma}_l c = 0, \quad \text{即ち, } \bar{\gamma}_l c \sin \bar{\gamma}_l c - ch \cos \bar{\gamma}_l c = 0 \dots\dots\dots (13b,c)$$

式 (8a), (10a) 及び式 (13a) を式 (2) の T に代入すると、次式を得る。

$$T(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \left\{ \frac{f_{mn}}{\lambda} \frac{\cosh \bar{n}_{mn} z}{\bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c + h \cosh \bar{n}_{mn} c} + \sum_{l=1}^{\infty} D_{mnl} \cos \bar{\gamma}_l z \right. \\ \left. \cdot \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2) t] \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) の T は、式 (4a-c) の境界条件を満足したので、式 (6) の初期条件を満足すればよい。式 (14) 中の双曲線関数を Fourier 級数に展開し、初期条件 (6) を課すると、次式を得る。

$$T(x, y, z, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \cos \bar{\gamma}_l z \left(\frac{f_{mn}}{\lambda} \frac{a_l}{\bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c + h \cosh \bar{n}_{mn} c} + D_{mnl} \right) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$a_l = \frac{2\bar{\gamma}_l}{\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2} \frac{h \cosh \bar{n}_{mn} c + \bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c}{(1+ch) \sin \bar{\gamma}_l c + \bar{\gamma}_l c \cos \bar{\gamma}_l c} \dots\dots\dots (16)$$

式 (15) から、未定定数が次の様に定められる。

$$D_{mnl} = -\frac{f_{mn}}{\lambda} \frac{a_l}{\bar{n}_{mn} \sinh \bar{n}_{mn} c + h \cosh \bar{n}_{mn} c} \dots\dots\dots (17)$$

式 (14) の T に、式 (17) を代入して整理すると、結果としての解が、次の様に求められる。

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \cos \bar{\alpha}_m x \cos \bar{\beta}_n y \left\{ \frac{\cosh \bar{n}_{mn} z}{\bar{n}_{mn}} - 2 \sum_{l=1}^{\infty} U_{mnl} \cos \bar{\gamma}_l z \exp[-\kappa(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2) t] \right\} \dots\dots (18)$$

ここで、

$$U_{mnl} = \frac{\bar{\gamma}_l}{(\bar{n}_{mn}^2 + \bar{\gamma}_l^2)[(1+ch) \sin \bar{\gamma}_l c + \bar{\gamma}_l c \cos \bar{\gamma}_l c]} \dots\dots\dots (19a,b)$$

また、 f_{mn} , $\bar{\alpha}_m$, $\bar{\beta}_n$ 及び $\bar{\gamma}_l$ は、それぞれ、式 (12), (8c), (10c) 及び式 (13c) に示したものである。

4. 計算結果

数値計算は、 $b/a = c/a = 1.0$ 及び $d/a = e/b = 0.3$ を持つ立方柱及び $b/a = c/a = 1.5$ 及び $d/a = e/b = 0.3$ を持つ矩形柱について行った。この場合に、ビオー数、 $H = ah$ は、0.1 及びフーリエ数、 $t' = \kappa t/a^2$ は、0.01, 0.1, 1.0 及び 100.0 が用いられた。超越方程式の根は、Regula - Falsi 法により求められた。計算結果は、級数の項数として、最初の 30 項を取るにより得られた。図-2 に、立方柱の端面 ($y=0$ 及び $z=a$) における温度分布を示した。この図から、初期条件が、 $T=0$ であるために、 t' が小さいうちには、 T が小さく、 t' が大きくなるにつれて T が大きくなり、定常状態 ($t'=\infty$) で最も大きな温度を示すことが分る。図-3 に、立方柱の内部における温度分布を $t'=0.1$ に関して示した。この図から、端面近くの T は大きく、かつ、 x 方向における変化が急激であるが、端面を離れると T は急激に減衰し、 x 方向における変化も緩やかになることが分る。図-4 に、矩形柱の端面 ($y=0$ 及び $z=c$) における温度分布を示した。この図から、加熱分布域が長方形のために、図-2 の立方柱に比べて、 T がやや大きいことが分る。図-5 に、矩形柱の内部における温度分布を $t'=0.1$ に関して示した。この図から、 $c/a = 1.5$ の高さの大きな矩形柱のために、 z 方向における減衰が極めて早く、 $z = 0.8c$ における値は、図-3 の立方柱における $z = 0.8a$ における値より、22.9% 小さいことが分る。また、 $z = 0.4c$ における値も相当に小さく、 $z=0$ における値は、図に表せない程に小さな値を示している。

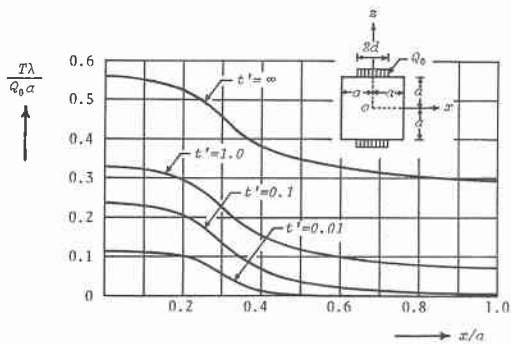


Fig.2 Distribution of T for cubic prism at $y=0$ and $z=a$
 $(b/a=c/a=1.0, d/a=e/b=0.3, H=ah=0.1, t'=\kappa t/a^2)$.

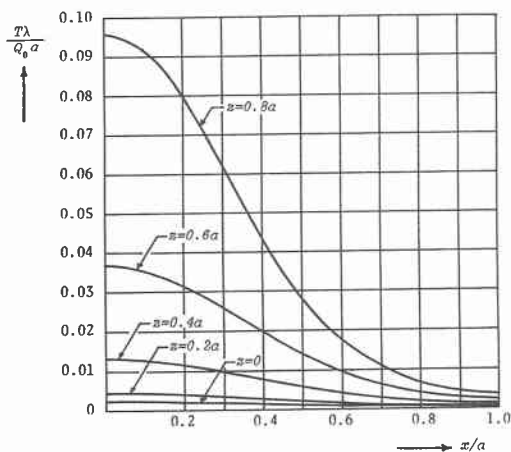


Fig.3 Distribution of T for cubic prism at $y=0$
 $(b/a=c/a=1.0, d/a=e/b=0.3, H=0.1, t'=0.1)$.

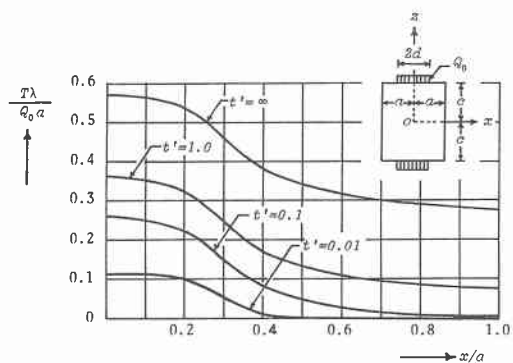


Fig.4 Distribution of T for rectangular prism at $y=0$ and $z=c$
 $(b/a=c/a=1.5, d/a=e/b=0.3, H=ah=0.1, t'=\kappa t/a^2)$.

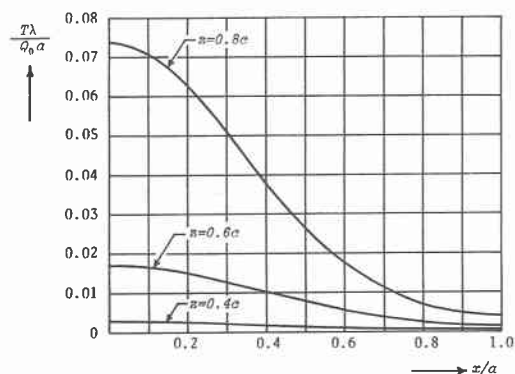


Fig.5 Distribution of T for rectangular prism at $y=0$
 $(b/a=c/a=1.5, d/a=e/b=0.3, H=0.1, t'=0.1)$.

5. 結 語

両端面に部分加熱を受け、4つの側面で熱放散のある直方柱の3次元熱伝導を厳密に解析した。直方柱の境界条件及び初期条件が変れば、もちろん、解は異なってくるが、本論文で取り扱った境界条件及び初期条件は、相当に一般性があり、解法及び解は、熱伝導の問題に対する有用な一つの手法を与えると考えらる。

参考文献

- 1) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. : Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., p.177, Oxford University Press, 1959.
- 2) 川下研介 : 熱伝導論, p.366, 生産技術センター, 1975.
- 3) 小平吉男 : 物理数学, 第二巻, p.470, 文献社, 1971.