

I-5

軸力と曲げを受ける平面構造物の弾塑性解析

北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之
 北海道大学工学部 学生員 阿久津稔和
 北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
 北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. はじめに

塑性ヒンジの概念を導入した塑性解析法を用いると、骨組構造の崩壊荷重を比較的精度良く求めることが可能である。この方法によれば、精度の良い降伏関数を用いることによって、各荷重段階での塑性ヒンジの形成順序や変形が組織的に算定することができる¹⁾。しかしながら、塑性ヒンジの近傍における応力分布は実際のものとはかなり異なっていると思われる。本報告は、塑性ヒンジ近傍の弾塑性境界を解析的に求め、塑性域の広がりを考慮して骨組構造の材料非線形解析を行ったものである。文献2)では、曲げモーメントを受ける長方形断面部材の弾塑性境界は放物線となることが示されているが、本報告ではこれをさらに発展させ、曲げモーメント及び軸力を受ける部材を扱い、塑性域の広がりを考慮した弾塑性解析を行っている。この解析によると、弾塑性境界は放物線と直線からなることが示されている。

2. 曲げと軸力による相関図

材料は、図-1に示す応力-ひずみ曲線となるような完全弾塑性体と仮定する。ここで σ_y は降伏応力度である。図-2(a)に示す幅 b 、高さ h なる長方形断面をもつ部材に曲げモーメント M と軸力 N が作用し、ある断面における応力分布が図-2(b)のようになっているとする。中立軸と x 軸との距離を η 、 x 軸と弾塑性境界との距離を δ とおくと、この断面に作用する M と N が変化するとき η 、 δ がいろいろな値をとり、応力分布も変化する。種々の η 、 δ の組み合わせに対する応力分布を図示すると、図-3(a)~(h)のようになる。曲げモーメント、軸力をそれぞれ全塑性曲げモーメント M_0 、全塑性軸力 N_0 で除して無次元化し、

$$m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0} \quad (1 \text{ a, b})$$

とにおいて m と n の相関図を描くと図-4のようになる。ここで(a)~(g)の領域は図-3の(a)~(g)の応力分布に対応しており、(h)は全塑性状態を表している。全塑性状態のときの m 、 n を η を用いて表すと次式のようになる。

$$m = 1 - 4\eta^2, \quad n = 2\eta \quad (2 \text{ a, b})$$

式(2)から、 η を消去して m と n の関係を導くと次式となる。

$$m = 1 - n^2 \quad (3)$$

式(3)は図-4(c)の曲線を表しており、放物線である。図-4における領域を分割しているその他の曲線についても同様に、 m 、 n の式から η を消去することにより m 、 n の関係式を導くことができ、それぞれ以下のようなになる。

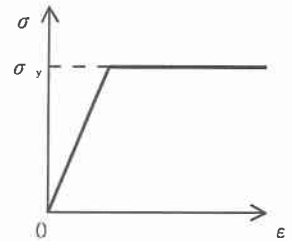


図-1 応力-ひずみ曲線

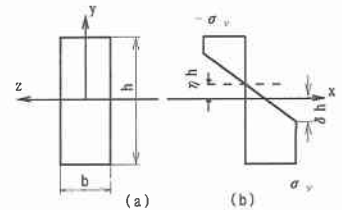


図-2 σの分布

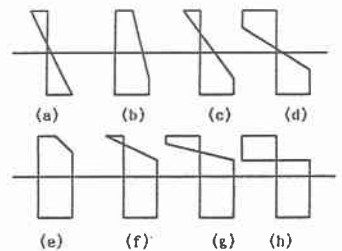


図-3 断面の応力分布

Elasto-Plastic Analysis of Frames Subjected to Bending and Axial Force

by Hideyuki HIRASAWA, Toshikazu AKUTSU, Toshiro HAYASHIKAWA and Koichi SATO

i) 下縁の応力が σ_y に達したとき $m = \frac{2}{3} (1-n)$ (4)

ii) 下縁応力がすでに σ_y に達しており、かつ
上縁応力がちょうど σ_y になったとき $m = \frac{2}{3} (1-n)(1+2n)$ (5)

iii) 上縁応力が0のとき $m = -\frac{2}{3} (1-n)(1+4n)$ (6)

iv) $\delta=0$ すなわちはりの重心軸上でちょうど σ_y
になったとき $m = \frac{4}{3} (1-n)$ (7)

v) iv) と同じ。ただし上縁と下縁で応力の向き
が異なるとき $m = -\frac{4}{3} n^2 + 1$ (8)

3. 剛性方程式の定式化

図-5に示すように部材左端に曲げモーメント M_i 、せん断力 S_i 、軸力 N_i が作用し、これらによって塑性域が斜線部のように広がっているものとする。 $0 \leq x \leq x_1$ の範囲の断面において、応力分布を図示すると、図-6(a)のようになる。この応力分布からこの断面に作用する曲げモーメント、軸力を δ 、 η を用いて計算し、無次元化した m 、 n を計算すると

$$m = 1 - \frac{4}{3} \delta^2 - \frac{8}{3} \delta \eta - \frac{16}{9} \eta^2 \quad (9 \text{ a, b})$$

$$n = 2\eta$$

が得られる。これらより η を消去し、 δ を m 、 n を用いて表すと次式となる。

$$\delta = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-m-n^2} \quad (10)$$

一方この部材の端部 i において N_i 、 S_i 、 M_i が作用しているので、 x の位置での曲げモーメント M_x 、軸力 N_x は

$$M_x = M_i - S_i x, \quad N_x = N_i \quad (11 \text{ a, b})$$

となる。式(11)を M_0 、 N_0 を除して無次元化し、式(10)に代入すると次式が得られる。

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left(\frac{N_i}{N_0}\right)^2} - \frac{N_i}{2N_0} \quad (12)$$

したがって図-5の $0 \leq x \leq x_1$ における弾塑性境界を y_{DL} 、 y_{DU} とし求めると次式のようになる。

$$y_{DL} = \delta h = \frac{\sqrt{3}h}{2} \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left(\frac{N_i}{N_0}\right)^2} - \frac{N_i}{2N_0} \quad (13 \text{ a, b})$$

$$y_{DU} = (2\eta + \delta)h = \frac{\sqrt{3}h}{2} \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0} - \left(\frac{N_i}{N_0}\right)^2} + \frac{N_i}{2N_0}$$

したがって弾塑性境界は放物線となる。ここで、 $y_{DU} = h/2$ とおくと

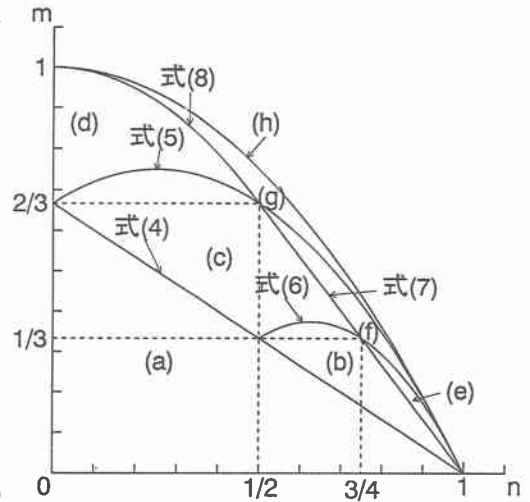


図-4 塑性相関曲線

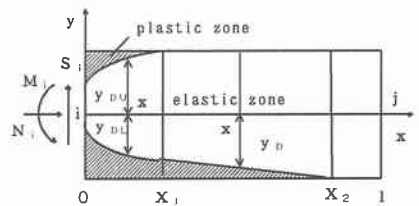


図-5 断面力と塑性域

$$x_1 = \frac{M_i}{S_i} - \frac{2M_o(N_o - N_i)}{3S_i N_o} - \frac{2M_o(N_o - N_i)}{3S_i N_o} \left(\frac{2N_i}{N_o} \right) \quad (14)$$

となり、 $x \geq x_1$ では上縁の応力は降伏応力に達していない。ここで塑性領域の剛性を無視すると、 x の断面でののはりの高さは $y_{Du} + y_{DL}$ であり、断面2次モーメント I_1 、及び断面積 A_1 をそれぞれ計算すると、

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left(\frac{S_i}{M_o} x + 1 - \frac{M_i}{M_o} - \left(\frac{N_i}{N_o} \right)^2 \right)^{3/2}, \quad (15 \text{ a, b})$$

$$A_1 = \sqrt{3}bh \sqrt{\frac{S_i}{M_o} x + 1 - \frac{M_i}{M_o} - \left(\frac{N_i}{N_o} \right)^2}$$

を得る。次に $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲の応力分布は図-6(b)のようになり、同様に δ を m 、 n を用いて表すと次式となる。

$$\delta = 1 - \frac{3m}{4(1-n)}$$

したがって、

$$y_D = (kS_i x + 1 - kM_i)h, \quad k = \frac{3N_o}{4M_o(N_o - N_i)} \quad (17 \text{ a, b})$$

を得る。ここで $y_D = h/2$ とおくと

$$x_2 = \frac{M_i}{S_i} - \frac{2M_o(N_o - N_i)}{3S_i N_o} \quad (18)$$

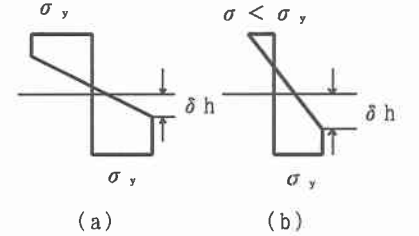


図-6 断面の応力状態

となり、 $x \geq x_2$ で全断面弾性である。塑性領域の剛性を無視すると位置 x の断面でののはりの高さは $h/2 + y_D$ であり、断面2次モーメント I_2 及び断面積 A_2 を求めるとそれぞれ次式のようになる。

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} \left(kS_i x + \frac{3}{2} - kM_i \right)^3, \quad A_2 = bh \left(kS_i x + \frac{3}{2} - kM_i \right) \quad (19 \text{ a, b})$$

図5のような変断面部材の剛性方程式を補仮想仕事の原理から誘導する。節点 i 、 j における軸力、 x 軸方向変位、せん断力、 y 軸方向変位、曲げモーメント、たわみ角をそれぞれ N_i 、 u_i 、 N_j 、 u_j 、 S_i 、 v_i 、 S_j 、 v_j 、 M_i 、 θ_i 、 M_j 、 θ_j とし、節点間に中間荷重が無いものとする、補仮想仕事の原理から導かれる節点力と節点変位の関係は、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ u_j \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここで、

$$a = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx, \quad b = \int_0^l \frac{-x}{EI_x} dx, \quad d = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx, \quad e = \int_0^l \frac{1}{EA_x} dx \quad (21)$$

式(20)、(21)より、次式の剛性方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} S_i \\ M_i \\ N_i \\ S_j \\ M_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/D & -b/D & 0 & -d/D & (dl+b)/D & 0 \\ -b/D & a/D & 0 & b/D & (-bl-a)/D & 0 \\ 0 & 0 & 1/e & 0 & 0 & -1/e \\ -d/D & b/D & 0 & d/D & (-dl-b) & 0 \\ (dl+b)/D & (-bl-a)/D & 0 & (-dl-b)/D & F/D & 0 \\ 0 & 0 & -1/e & 0 & 0 & 1/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ u_i \\ v_j \\ \theta_j \\ u_j \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 $D = ad - b^2$ 、 $F = dl^2 + 2bl + a$ である。

4. 数値計算例

3で得た剛性マトリックスを用いて、図-7のような柱の上端に水平、鉛直方向にそれぞれ P 、 $20P$ の比例荷重を載荷させ、計算を行った。数値計算には荷重増分法を用い、荷重を一段階増加させる毎に刻々と部材要素の剛性を変え、塑性ヒンジが生じるまで計算を行っている。部材内の塑性域の広がり様子は図-8で示し、 $P=360[\text{kg}]$ から、終局荷重 $P=596[\text{kg}]$ までの弾塑性境界線が表されている。 $P=360[\text{kg}]$ のとき、固定端右側が圧縮降伏応力となり、 $P=526[\text{kg}]$ のとき固定端左側が引張降伏応力を生じ、さらに荷重が増加して $P=596[\text{kg}]$ のとき固定端が塑性ヒンジとなる。図-9は上端における水平荷重 P と、水平方向変位との関係を表したものである。 $P=360[\text{kg}]$ の弾性限界を越えると、部材の剛性が減少し曲線の傾きが小さくなり、非線形挙動を表していることがわかる。

5. おわりに

曲げモーメントと軸力により生じる塑性域が存在する部材の剛性マトリックスを誘導し、弾塑性解析を行った。曲げのみによって生じる弾塑性境界は放物線で表されるのに対し、曲げに加えて軸力が作用することによって、放物線の他に新たに直線部分が現れることが示された。この弾塑性境界は、節点における軸力、せん断力、曲げモーメントから求められるパラメータ η 、 δ の簡単な式を用いることにより、一本の線で表すことが可能である。したがって有限要素法に見られるようなメッシュの粗さの影響は生じない。また、一部材につき一要素で計算が可能であるため、計算時間が短縮できる点も本解析法の特徴である。

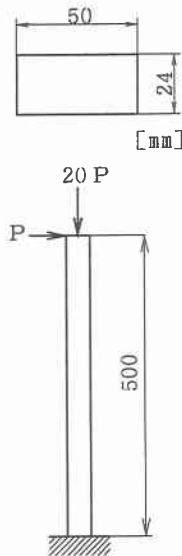


図-7 計算モデル

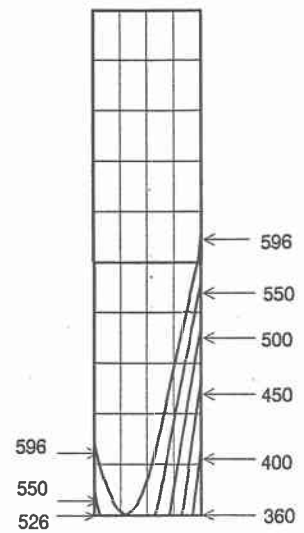


図-8 塑性域の広がり

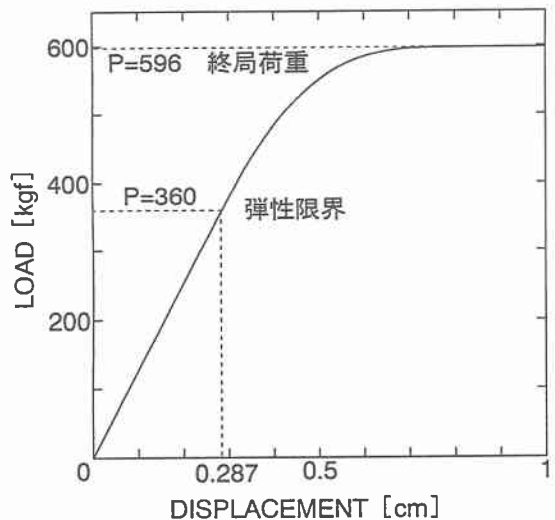


図-9 荷重変位曲線

<参考文献>

- 1) 成岡昌夫、服部正、加藤進、後藤茂夫、上田幸雄：コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-1-B、骨組構造解析、培風館、1971
- 2) 平沢秀之、林川俊郎、佐藤浩一：断面2次モーメントの減少を考慮した骨組構造の非線形解析、土木学会北海道支部論文報告集、第50号、PP. 16-19、1994
- 3) 大地羊三：マトリックス構造解析、コロナ社、1977