

II-82

水中構造物を過る波
—— 主要解の特異性を考慮した解法 ——北海道大学大学院 学生員 折橋 恒春
北海道大学工学部 正 員 浜中 建一郎

1. はじめに

水中構造物を過る波の変形問題を解く時、グリーンの式を用いた方法がよく使われる。この方法は特異解として主要解を用いる方法と、グリーン関数を用いる方法とに大別される。又、どちらの方法においても、構造物から離れた仮想境界面上で、減衰定在波や回折散乱波を考慮するかしないかでいくつかのバリエーションが考えられる。いずれの方法においても、特別な形状をもった構造物である場合を除き、グリーンの公式の積分表現を離散化した数値積分で近似し、境界面上のセグメントに配置した速度ポテンシャルを未知数とする線形代数方程式を解くことに帰着されている。この時、より細かく離散化することが必ずしもより真の解に近づくことにならず、主要解の特異性を考慮した精度のよい数値積分を行う必要があることが、折橋・浜中(1992)、折橋・浜中(1993)によって、特に断面2次元の問題を例にして指摘されている。

一方、3次元問題を主要解を用いて解くこともでき、上で述べたような種々のバリエーションについて金戸・浜中(1994)によって検討されている。しかしながら、3次元問題では、考慮すべき境界面と未知数が増え、プログラムは複雑になると同時に、計算機のメモリーや計算コストに問題が残る。このことから、3次元問題ではグリーン関数を用いる方法が非常に有利になると考えられる。波動場におけるグリーン関数としては唯一 John(1950)によって導かれたものが知られている。しかしながら、このJohnのグリーン関数においても、その特異性に伴った解の収束性に問題があることが Fenton(1978)、Isaacson(1982)等により指摘されているが、その問題の本質が正確には解明されていないため解決に到っていない。

このことから本研究では、Johnのグリーン関数の級数表示形を簡単な方法で再導出し、その過程を通して、収束性の悪さの本質を解明し、その問題を解決した新たなグリーン関数を修正グリーン関数として提案することを目的とする。

2. John のグリーン関数

本論文では3次元で考える前にまず断面2次元の場合から考えてみる。グリーン関数とは特異性をもちながら考える問題における境界条件を満たす関数である。しかしながら、周囲の境界条件を満足すると同時に構造物の境界条件をも満足させるのは非常に強い制約を受けるので、まず周囲の境界条件のみを満たすグリーン関数を考える。グリーン関数に対する境界条件は、(1)式のように表され、さらに無限遠方($x=\pm\infty$)では進行波形の解となる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta G &= -\delta(x-x_0, z-z_0), & G: \text{グリーン関数} \\ \frac{\partial G}{\partial z} - \sigma G &= 0 & (z=0), \quad \sigma = \omega^2/g \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 & (z=-h) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで(1)式の中の δ 関数の意味を考える。上の G とラプラスの方程式を満たす解 ϕ とにグリーンの公式を適用すると

$$\int_v (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dv = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2)$$

Surface waves on a submerged structure

by Tsuneharu ORIHASHI and Ken-ichiro HAMANAKA

となり、左辺の ΔG に(1)の δ 関数を代入すると

$$\phi(x_0, z_0) = - \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (3)$$

となる。一方、特異点 (x_0, z_0) の回りで関数 G の性質を見るため、考えている領域から (x_0, z_0) を中心とする半径 ε の円をくり抜いた領域でグリーン関数の公式を適用すると、全域で G も ϕ もラプラスの方程式を満たすから

$$\int_{s_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds = - \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (4)$$

ただし、 s_0 は小円の周囲を表す。(3)式との比較から、ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で(4)式の左辺が $\phi(x_0, z_0)$ となることが要請される。すなわち、今 G は s_0 上で一定、 ϕ は (x_0, z_0) の近傍で平面で近似されると仮定すると(4)式の左辺は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_0} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \phi(x_0, z_0) \quad (5)$$

となる。次に(1)の様な条件を満たすラプラスの方程式の解として

$$F_0 = e^{ikx} \cosh k(z+h), \quad F_n = e^{knx} \cos k_n(z+h) \quad (6)$$

を考え、これらの関数達の級数和でグリーン関数を構成することを考える。ただし、分散関係式は、

$$k \tanh kh = 1, \quad k_n \tan k_n h = 1 \quad (7)$$

ここで(1)で与えられた δ 関数を(3)式の様に定義を拡張して与える。

$$\Delta G = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (8)$$

また、グリーン関数のもつ対称性より、 $x = x_0$ を中心に

$$G(x, x_0) = G(x_0, x) \quad (9)$$

となる。この事と無限遠方での条件を考慮すると、(2)式で与えられた関数の級数和としてグリーン関数は次のように与えられる。

$$G = \frac{i C_0}{k} e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z+h) + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{k_n} e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z+h) \quad (10)$$

ここで、 $x = x_0$ を中心に幅 2ε の帯状の領域を除いた領域 (図 1) を考え、そこにグリーン関数と波動場を表す速度ポテンシャル ϕ についてグリーン関数の公式を適用する。ここで、

$$\Delta G = 0 \quad (x \neq x_0, z \neq z_0) \quad (11)$$

$$\Delta \phi = 0 \quad (12)$$

とする。

$$I = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds = 0 \quad (13)$$

ν : 領域内から外へ向かう法単位ベクトル

また、 ϕ と G は水面と底面の境界条件を満たすから(13)式の積分は帯状領域の両側と遠方の仮想境界上だけとなる。特異性のある帯状領域の両側の積分を考えると、

$$I = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (14)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ では、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} &= - \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} \\ \phi \Big|_{\Gamma_1} &= \phi \Big|_{\Gamma_2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。(10)式は、 x_0 について対称性をもつため、

$$G \Big|_{\Gamma_1} = G \Big|_{\Gamma_2} \quad (16)$$

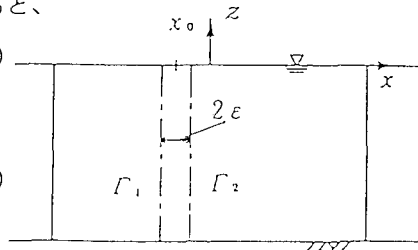


図 1

(13)式の積分は

$$I = 2 \int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds \quad (17)$$

となる。ここで G が (x_0, z_0) で(5)式の様な意味の特異性をもつには

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds = \phi(x_0, z_0) \quad (18)$$

これは $\partial G / \partial \nu$ が $x = x_0$ の z 軸に沿って $\delta(z - z_0)$ となることを要請する。すなわち、

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \delta(z - z_0) \quad (19)$$

(10)式から Γ_1 上で、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu} &= C_0 \cosh k(z + h) \cosh k(z_0 + h) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n(z + h) \cos k_n(z_0 + h) = \frac{1}{2} \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式の両辺に $\cosh k(z + h)$ や $\cos k_m(z + h)$ を乗じて $-h \leq z \leq 0$ で積分すると、 $\cosh k(z + h)$ や $\cos k_m(z + h)$ 達の間の直行性と、 δ 関数の性質(21)を用いると

$$\frac{1}{2} \int_{-h}^0 \cosh k_m(z + h) \delta(z - z_0) dz = \frac{1}{2} \cosh k_m(z_0 + h) \quad (21)$$

$$C_0 = (h + \frac{1}{\sigma} \sinh^2 k_m h)^{-1} \quad (22)$$

$$C_m = (h - \frac{1}{\sigma} \sin^2 k_m h)^{-1} \quad (23)$$

$$\text{ただし } \cosh k h = k / \sigma \sinh k h, \quad \cos k_m h = -k_m / \sigma \sinh k_m h \quad (24)$$

となる。この C_0, C_m はJohnのグリーン関数のものと一致する。

3. 収束性の検討

著者らはJohnのグリーン関数の収束性が悪い原因として彼が(20)式の右辺に用いた z 軸に沿った δ 関数にあると考え、そのことについて検討してみた。Johnの用いた δ 関数の近似法の性質を見るために周期的 δ 関数を考え、そのフーリエ級数を求めると、

$$\sum_n A_n e^{inx} = \sum_m \delta(x - x_0 - 2\pi m) \quad (25)$$

$$\text{ここで } A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{2\pi} e^{-inx_0} \quad (26)$$

(26)式を用いて(25)式の級数和を求めると、

$$\sum_n^N A_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\{(N+1/2)(x - x_0)\}}{\sin\{(x - x_0)/2\}} \quad (27)$$

となり、(27)式は展開項数 N を ∞ にまで増加させても収束しないことが分かる。

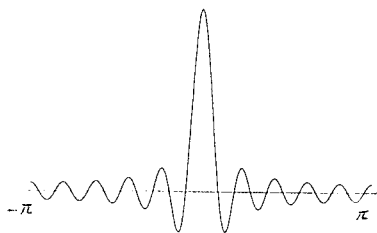


図 2

δ 関数 (John), $N=10$

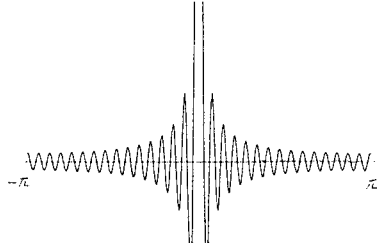


図 3

δ 関数 (John), $N=30$

図 2, 3はJohnの用いた δ 関数をフーリエ級数に展開した図で、展開項数(N)を増加させても定義幅外の揺らぎは大きく収束性の改善は見られないことが分かる。

ここで、著者らはJohnの用いた δ 関数の代わりに以下のような条件を満たし、収束性のよい δ 関数を考えることにした。

$$\delta(x-x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x-x_0) \quad (28)$$

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \delta_a(x-x_0) dx = 1 \quad (29)$$

$$\delta(x-x_0) = 0 \quad (x > x_0 + a, x < x_0 - a) \quad (30)$$

2a: δ 関数の定義幅

検討したのは、矩形パルス、三角形パルス、余弦パルスで最も良い収束性を示したのは余弦パルスで、

$$\delta_a = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{a} (x - x_0) \right\} \quad (31)$$

である。図 4, 5は余弦パルスの図でJohnの用いた δ 関数よりも定義幅外での揺らぎは少ないことが分かる。展開項数(N)を増加させると、定義幅外での揺らぎはほとんど無くなることが分かる。

(26), (27)式は次の様になる。

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \quad , \quad A_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{a} (x - x_0) \right\} dx \\ &= \frac{\sin na}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n}{(\pi/a)^2 - n^2} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\sum_n^N A_n e^{inx} = A_0 + 2 \sum_n^N A_n \cos nx \quad (33)$$

上のような δ 関数を用いて、再導出したグリーン関数を修正グリーン関数として次章に示す。

4. 修正グリーン関数

3章で示した余弦パルスを(20)式の $\delta(z-z_0)$ として用い、(20)式を書き直すと、

$$\begin{aligned} &C_0 \cosh k(z+h) \cosh k(z_0+h) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n(z+h) \cos k_n(z_0+h) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{a} (z+z_0) \right\} & (z_0 - a \leq z \leq z_0 + a) \\ 0 & (z > z_0 + a, z < z_0 - a) \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

以下2章と同様に、 C_0, C_n を決定するためにそれぞれ両辺に $\cosh k(z+h), \cos k_m(z+h)$ を乗じて $-h \leq z \leq 0$ で積分すると、修正グリーン関数は、

$$\begin{aligned} G &= \frac{i}{k} C_0 e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z+h) \cosh k(z_0+h) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k_n} e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z+h) \cos k_n(z_0+h) \end{aligned} \quad (35)$$

$$C_0 = \frac{\sinh a k}{a k \{1 + (a k / \pi)^2\}} \left(h + \frac{1}{\sigma} \sinh^2 k h \right)^{-1} \quad (36)$$

$$C_n = \frac{\sin a k_n}{a k_n \{1 - (a k_n / \pi)^2\}} \left(h - \frac{1}{\sigma} \sin^2 k_n h \right)^{-1} \quad (37)$$

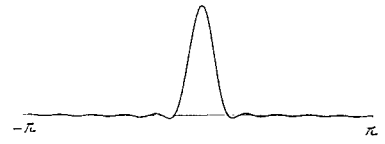


図 4

余弦パルス, $N=10$

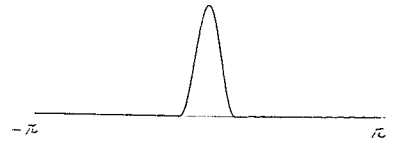


図 5

余弦パルス, $N=30$

(37)式をJohnのグリーン関数の係数 C_n (23)と比較すると $1/k_n$ だけ収束が早くなっていることが分かる。

5. 結語

図 6, 8, 9(以下の図は、すべて左上辺が水面、右上辺が $x = x_0$ を表す)はJohnのグリーン関数の値、 $\partial G/\partial x$ 、 $\partial G/\partial z$ を表した図で展開項数は $N=10$ 、 δ 関数の定義幅($2a$)は水深の $1/10$ である。図

7は同じ条件の修正グリーン関数の値を表している。 $N=10$ ではJohnとの違いは余り見られない。図10, 11では $N=30$ におけるJohnと修正グリーン関数の図で、Johnのグリーン関数は N を増加させても特異点での z 方向の揺らぎは見られるが、修正グリーン関数では揺らぎはほとんど見られない。図 12, 13は $\partial G/\partial x$ の図で図 12はJohn、図 13は修正グリーン関数である。 $\partial G/\partial x$ も同様に N を増加させると z 方向の揺らぎは、Johnのグリーン関数では改善は見られないが、修正グリーン関数では揺らぎは小さくなっている。図 14, 15は $\partial G/\partial z$ で図 14はJohn、図 15は修正グリーン関数で、 $\partial G/\partial z$ もグリーン関数、 $\partial G/\partial x$ と同様の傾向を示す。

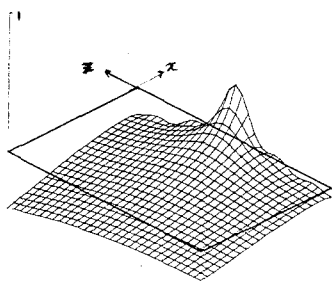


図 6
グリーン関数(John), $N=10$

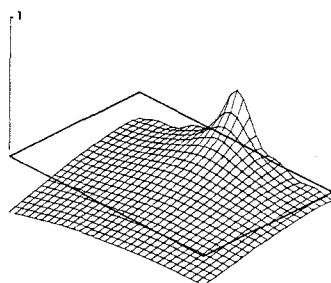


図 7
グリーン関数(修正), $N=10$

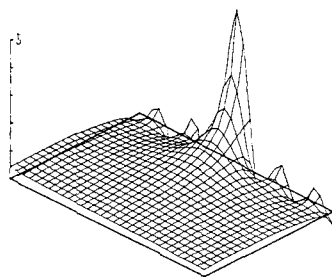


図 8
 $\partial G/\partial x$ (John), $N=10$

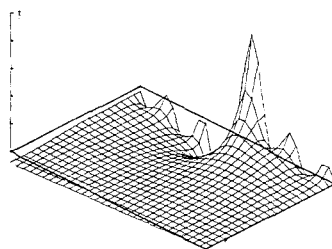


図 9
 $\partial G/\partial z$ (John), $N=10$

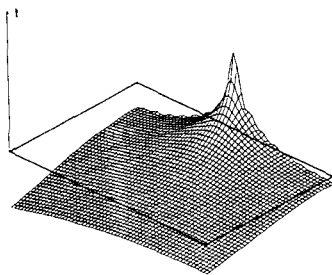


図 10
グリーン関数(John), $N=30$

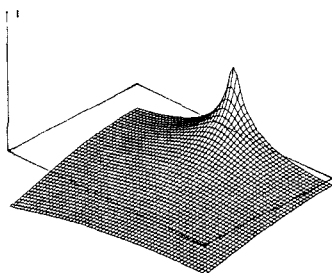


図 11
グリーン関数(修正), $N=30$

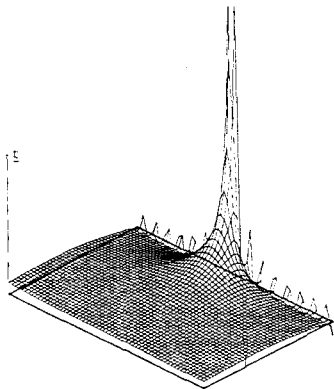


図 12
 $\partial G/\partial x$ (John), $N=30$

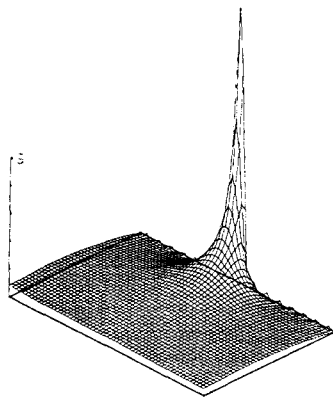


図 13
 $\partial G/\partial x$ (修正), $N=30$

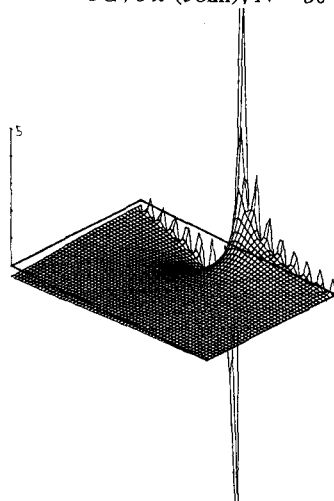


図 14
 $\partial G/\partial z$ (John), $N=30$

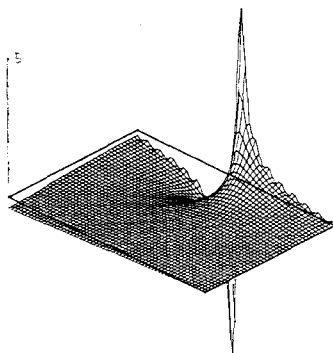


図 15
 $\partial G/\partial z$ (修正), $N=30$

グリーンの公式を離散化した数値積分においては、 $G, \partial G/\partial \nu$ ($\partial G/\partial x, \partial G/\partial z$) の揺らぎが大きな点の付近に選点を取ると、その選点の場所によって $G, \partial G/\partial \nu$ の値が大きく変化し分割を多くして選点を増加させても妥当な解が得ることができないと言える。このことが、John のグリーン関数の収束性を悪くさせている原因であり、本論文で示した修正グリーン関数の改善した点である。

参考文献

- 折橋・浜中(1992) : 没水形水平構造物を過る波, 土木学会道支部論文集, 第49号, 頁697-700
 折橋・浜中(1993) : グリーンの公式を用いた没水形構造物過る波の解析, 第48回土木学会年講, 頁792-793
 金戸・浜中(1994) : 単体構造物回りの波の3次元変形, 土木学会道支部論文集, 第50号, (印刷中)
 John, F. (1950) : On the motion of floating bodies II. simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 3, 45-101
 Fenton, J. (1978) : Wave forces on vertical bodies of revolution, J. Fluid Mech., Vol. 85, 241-255
 Issacson, M. (1982) : Fixed and floating axisymmetric structures in waves, ASCE, Vol. 108, No. WW2, 180-199